Herschrijftechnieken voor Vlechten

We bestuderen een equationeel systeem voor *vlechten* [Art26]. We geven eerst, in Sectie 1, een informele specificatie die we vervolgens formaliseren in Sectie 2 door middel van een equationele specificatie $\langle \Sigma, E \rangle$ Of twee vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ equivalent zijn kan dan gezien worden als een instantie van het *uniforme woord probleem* voor de equationele specificatie:

$$\mathbf{U} =_E \mathbf{V} \ ?$$

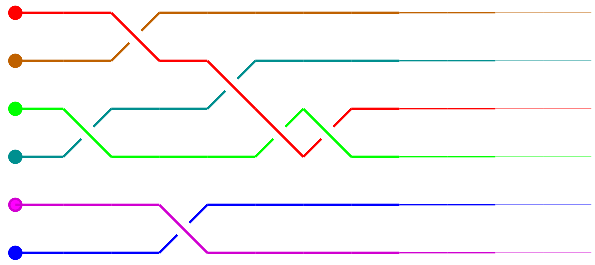
Dit probleem wordt behandeld in Sectie 5. Het probleem of twee vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ 'afgemaakt' kunnen worden met vlechten $\mathbf{U}'$ en $\mathbf{V}'$ respectievelijk, zodanig dat ze equivalent worden:

$$\exists \mathbf{U}', \mathbf{V}' \quad \mathbf{U}\mathbf{U}' =_E \mathbf{V}\mathbf{V}' \ ?$$

kan gezien worden als een instantie van het *unificatie* probleem modulo een equationele specificatie. Dit probleem en de oplossing ervan met behulp van (verscheidene) herschrijftechnieken komt uitgebreid aan bod in Sectie 3.

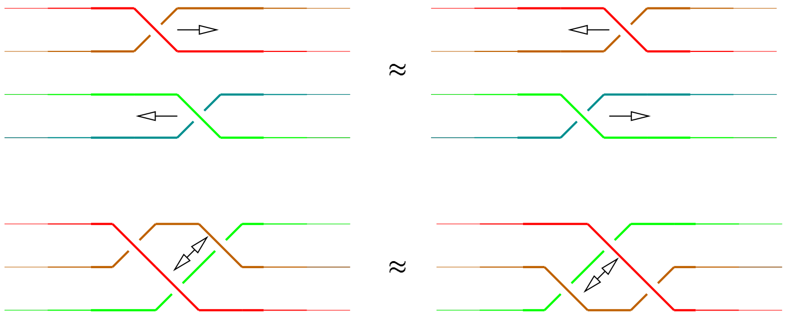
1 Informele Specificatie[1]

Dit is een vlecht:[2]



Zij bestaat uit 6 *strengen* die vervlochten zijn. De strengen beginnen links en lopen rechts (oneindig, rechtlijnig) door. Als twee strengen elkaar kruisen ($\times$), dan gaat de bovenste streng steeds over de onderste streng heen, en zo'n kruising noemen we een *(halve) slag*. Als we dit met echte strengen uitvoeren, dan wordt duidelijk dat vlechten soms in elkaar overgevoerd kunnen worden. Hiermee wordt bedoeld, dat de beginpunten en de (uiteindelijke) uiteinden van de strengen vastgehouden worden en er alleen wat met de strengen 'geschoven' wordt.[3] Twee eenvoudige gevallen zijn weergegeven in Figuur 1, waarin de pijlen aangeven hoe er geschoven moet worden om de linker in de rechter vlecht te transformeren en vice versa.

[1] Deze sectie is gebaseerd op [KV].
[2] Beter: Dit is een twee dimensionale projectie van een drie dimensionale vlecht [Art47].
[3] De zo verkregen equivalentie tussen vlechten wordt in de wiskunde aangeduid met het begrip *isotopie* [Art47].

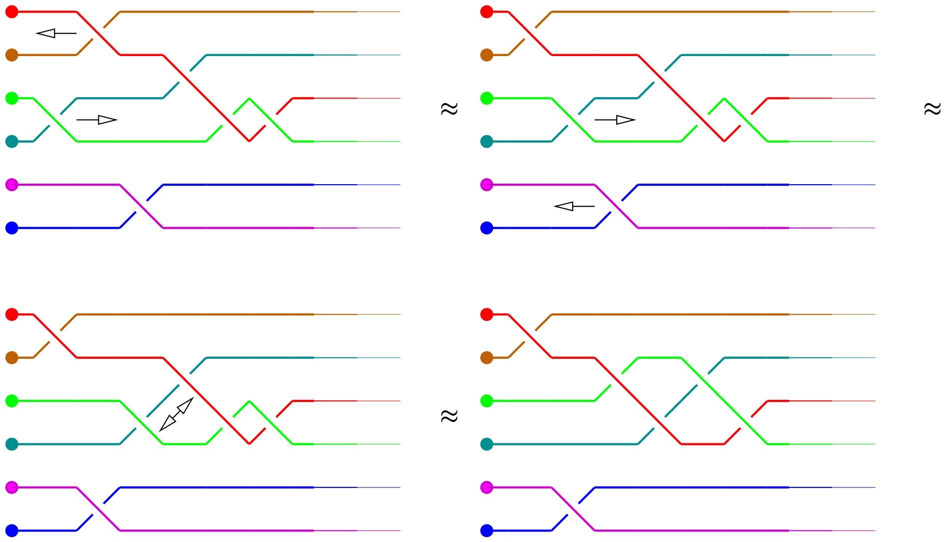


Figuur 1: Transformaties op vlechten

Opgave 1 *Voer de transformaties in Figuur 1 uit met echte strengen (b.v. strengen haar). Voor de eerste equivalentie zijn dus vier en voor de tweede equivalentie drie strengen benodigd.*

Noem twee vlechten *equivalent* als ze in elkaar overgevoerd kunnen worden.

Voorbeeld 2 *Gebruikmakend van de transformaties in Figuur 1, die natuurlijk op iedere plaats in een vlecht toegepast kunnen worden, kunnen we onze voorbeeldvlecht als volgt overvoeren in een equivalente vlecht:*

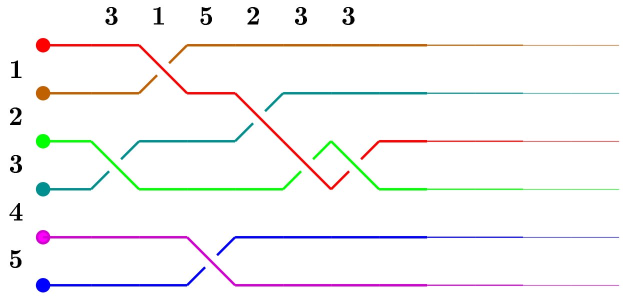


Hierbij geven de pijlen aan hoe een vlecht in de daaropvolgende vlecht getransformeerd kan worden.

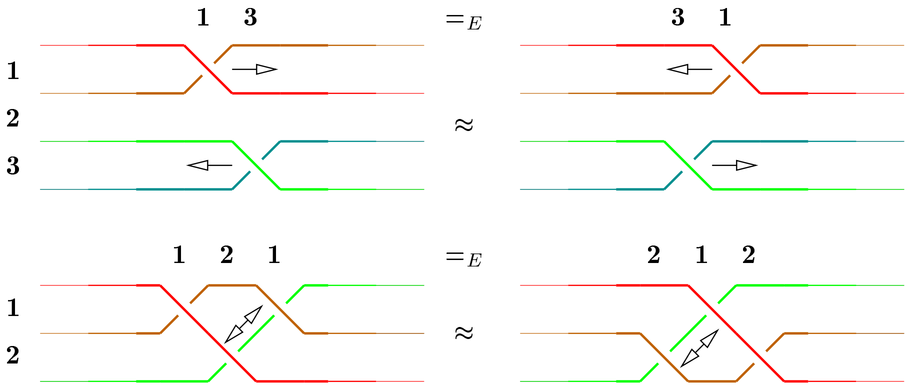
Je kunt je afvragen hoe we kunnen bepalen of twee vlechten equivalent zijn. Een eerste stap daarin is het formaliseren van de intuïtieve noties van vlecht en equivalentie. In de meest natuurgetrouwe (continue) formalisering worden strengen gerepresenteerd als krommen in de $\mathbb{R}^3$ [Art47]. Maar zoals aangetoond in [Art26, Boh47] volstaat het om een geschikte (discrete) representatie van rijtjes van slagen alsmede van de twee transformaties daarop zoals getoond in Figuur 1, te vinden. Dit is het onderwerp van de volgende sectie.

2 Equationele Specificatie

Beschouw een vlecht bestaande uit $n+1$ strengen. De openingen tussen opeenvolgende strengen kunnen van 1 tot n genummerd worden, zoals in de vlecht:

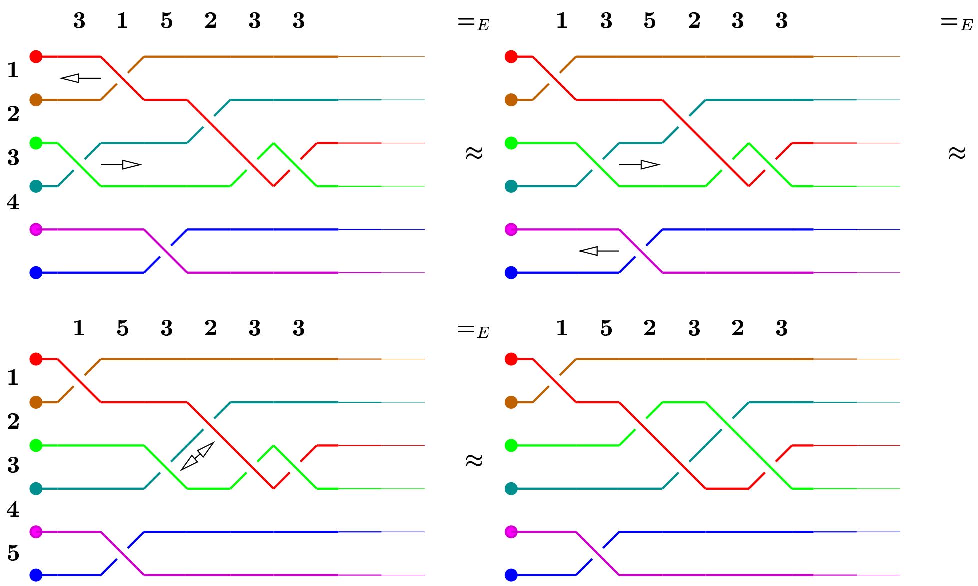


De vlecht zelf kunnen we nu representeren door van links naar rechts de voorkomens (d.w.z. nummers van openingen) van slagen op te sommen. In het voorbeeld resulteert dit in het rijtje 315233. Het representeren van de transformaties in Figuur 1 leidt tot de gelijkheden in Figuur 2.



Figuur 2: Transformaties op vlechtrepresentaties

Voorbeeld 3 *Als de transformaties in Voorbeeld 2 voorzien worden van hun representatie resulteert dat in:*



Als we alleen geïnteresseerd zijn in de representaties krijgen we:

$$\mathbf{\underline{31}5233} =_E \mathbf{1\underline{35}233} =_E \mathbf{15\underline{323}3} =_E \mathbf{152323}$$

Hierbij geven de onderlijningen aan hoe een vlecht in de daaropvolgende vlecht getransformeerd kan worden.

Hopelijk is het bovenstaande voldoende om de volgende definitie begrijpelijk te maken.

Definitie 4 *Voor ieder natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ is $\langle \Sigma, E\rangle$ de equationele specificatie (zie [DII, Completion of equational specifications]) van* vlechten bestaande uit n strengen.

- Σ *is een alfabet bestaande uit unaire symbolen* $\mathbf{i}$, *de* slagen, *voor iedere* $1 \leq i < n$, *en een constante (nullair functiesymbool) o.* Vlechten *zijn gesloten Σ termen en worden aangeduid met* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, ...
- E *is een verzameling van (schema's voor) gelijkheden bestaande uit:*

  1. $$\mathbf{i}(\mathbf{j}(\mathbf{i}(x))) = \mathbf{j}(\mathbf{i}(\mathbf{j}(x)))$$
     voor alle $1 \leq i, j < n$ zodanig dat $|i - j| = 1$ (d.w.z. de slagen worden toegepast op drie willekeurige aangrenzende strengen), en
  2. $$\mathbf{i}(\mathbf{j}(x)) = \mathbf{j}(\mathbf{i}(x))$$
     voor alle $1 \leq i, j < n$ zodanig dat $|i - j| \geq 2$ (d.w.z. de slagen worden toegepast op vier willekeurige echt verschillende strengen).[4]

[4] Dit schema wordt *syntactische isotopie* genoemd in [Laf].

Merk op dat we hier te maken hebben met een equationele specificatie voor 'strings' (zie [DI, Sectie 2.7] of ook de codering van PCP in [DII, Onbeslisbare eigenschappen van TRSen]). We zullen in het vervolg de standaardnotatie voor deze gebruiken (dat hebben we zelfs al gedaan in Voorbeeld 3). Dus in plaats van $\mathbf{1}(\mathbf{2}(\mathbf{3}(o)))$ schrijven we gewoon $\mathbf{123}$. Een vlecht zonder slagen schrijven we als o. De *concatenatie* $\mathbf{UV}$ van $\mathbf{U} = \mathbf{i}_1(\ldots(\mathbf{i}_k(o))\ldots)$ en $\mathbf{V}$ is gedefinieerd als $\mathbf{i}_1(\ldots(\mathbf{i}_k(\mathbf{V}))\ldots)$.

Opgave 5 *1. Laat zien dat equivalente vlechten dezelfde diepte hebben (zie [DI, Definition 2.1.5]).*

2. Laat zien dat de concatenatie van twee vlechten weer een vlecht is.

3. Toon aan : $\mathbf{U} =_E \mathbf{V}$ *en* $\mathbf{U}' =_E \mathbf{V}'$ *impliceert* $\mathbf{UU}' =_E \mathbf{VV}'$.

Nu vlechten geformaliseerd zijn, zullen we ons in de twee volgende secties wagen aan de in de introductie genoemde problemen.

3 Unificatie

Het unificatie probleem voor vlechten wordt in [SS91, pp. 132-134] op de volgende antropomorfe wijze beschreven. Een meisje heeft twee vlechtjes, beide bestaande uit zes strengen (zie Figuur 3). Vader begint met vlechten van de linker vlecht, en moeder met vlechten van de rechter vlecht. Na enige slagen zoals aangegeven in de figuur, merken ze op dat ze op een andere manier gevlochten hebben. Uiteindelijk willen ze uitkomen op twee 'dezelfde' vlechten. De vraag luidt nu: Kan dat? In de equationele specificatie van vlechten komt dit neer op de volgende vraag:

$$\exists \mathbf{U}, \mathbf{V}\ \mathbf{315233U} = \mathbf{42531V}\ ?$$

We zullen herschrijftechnieken gebruiken om dit probleem op te lossen. Daartoe definïeren we eerst een TRS die het maken van slagen formaliseert.

Definitie 6 *1. Beschouw de TRS* $\langle \Sigma, R\rangle$*, waarbij* R *bestaat uit de regels:*

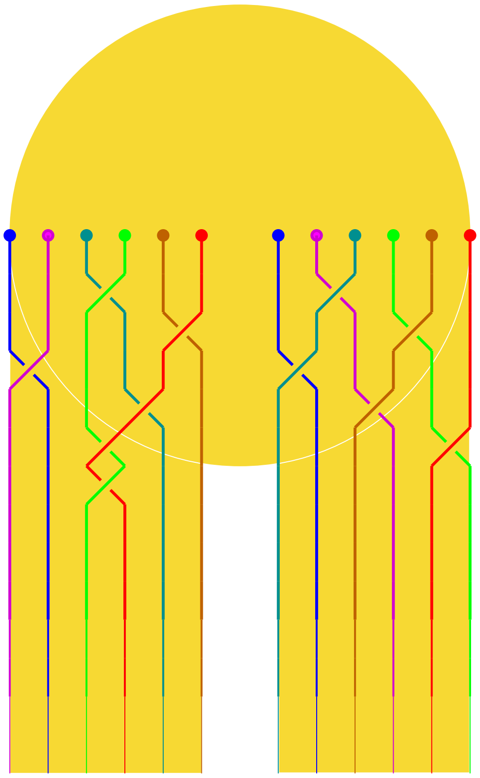
$$o \to \mathbf{i}(o)$$

voor iedere $1 \leq i < n$.

2. De herschrijfrelatie van de ARS $\langle \mathrm{Ter}(\Sigma)/E, \to\rangle$ *is gedefinieerd door*

$$\mathbf{U} \to \mathbf{V} \iff \exists \mathbf{U}', \mathbf{V}'\ \mathbf{U} =_E \mathbf{U}' \to_R \mathbf{V}' =_E \mathbf{V}$$

De objecten van de ARS zijn de equivalentieklassen van in elkaar over te voeren vlechten. Het doen van een $\to$-herschrijfstap komt overeen met het doen van een slag. De geformaliseerde vraag van de ouders luidt nu: Is $\to$ confluent?



Figuur 3: Meisje (m/v) met twee vlechten

Opgave 7 1. *Laat zien dat* $\mathbf{U} \twoheadrightarrow_R \mathbf{UV}$ *voor willekeurige vlechten* $\mathbf{U}$ *en* $\mathbf{V}$.

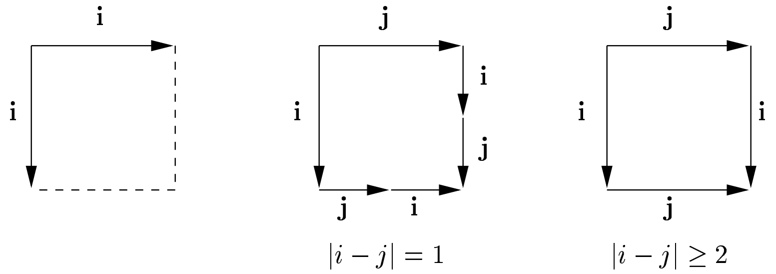
2. *Laat zien dat als* $\mathbf{U}' =_E \mathbf{U}$, $\mathbf{U} \to \mathbf{V}$, *en* $\mathbf{V} =_E \mathbf{V}'$, *dan* $\mathbf{U}' \to \mathbf{V}'$.

3. *Ga bij uzelf na dat het probleem van de ouders equivalent is aan het confluentie probleem voor* $\to$.

Lokale confluentie is een noodzakelijke voorwaarde voor confluentie van ARS-en. In Figuur 4 is te zien dat vlechten lokaal confluent is. De diagrammen in Figuur 4 zullen we *elementaire diagrammen* noemen. In een diagram geven stippellijnen lege herschrijfrijen weer.

Merk op dat in het middelste elementaire diagram meerdere stappen (zowel rechts als onder 2 stappen) nodig zijn om het gemeenschappelijke reduct ($\mathbf{iji} =_E \mathbf{jij}$) te bereiken. Daarom volgt confluentie *niet* uit lokale confluentie; het tegelen met elementaire diagrammen zou oneindig lang door kunnen gaan (vgl. [DII, Figures 4.3,4,4]). Het is dus a priori niet duidelijk of de ARS $\to$ confluent is, [5]

[5] Mitsgaders lijkt geen van standaardtechnieken om confluentie van een ARS te bewijzen toepasbaar te zijn.



Figuur 4: Elementaire diagrammen ($1 \leq i, j < n$)

en een nauwkeuriger analyse is vereist.

Opgave 8 *1. Ga na dat de elementaire diagrammen in Figuur 4 inderdaad confluent zijn. (Wat moet er eigenlijk nagegaan worden?)*

2. Laat zien dat $\rightarrow$ confluent is, voor $0 \leq n \leq 2$.

3.1 Confluentie door Completeren (weinig strengen)[6]

Ter bepaling der gedachten beschouwen we vlechten bestaande uit weinig (drie en vier) strengen.

Voorbeeld 9 *Voor de vlechten* **1112** *en* **2221** *kunnen we d.m.v. tegelen met de elementaire diagrammen in Figuur 4 inderdaad een gemeenschappelijk reduct vinden. Dit wordt getoond in Figuur 5, waarin de bovenrand gevormd wordt door de vlecht* **1112** *en de linkerrand door* **2221**.

Dus hoewel de elementaire diagrammen in Figuur 4 in principe tot een 'oneindige verkleining' zouden hebben kunnen leiden, treedt dit niet op in Figuur 5. Als we b.v. naar de 3^{de} kolom kijken dan vindt er van boven naar beneden wel een verkleining plaats, maar deze wordt 'gecompenseerd' door een toenemend aantal lege stappen. Ter voorbereiding op het algemene bewijs van confluentie van $\rightarrow$, laten we dit eerst zien voor drie-strengige vlechten.

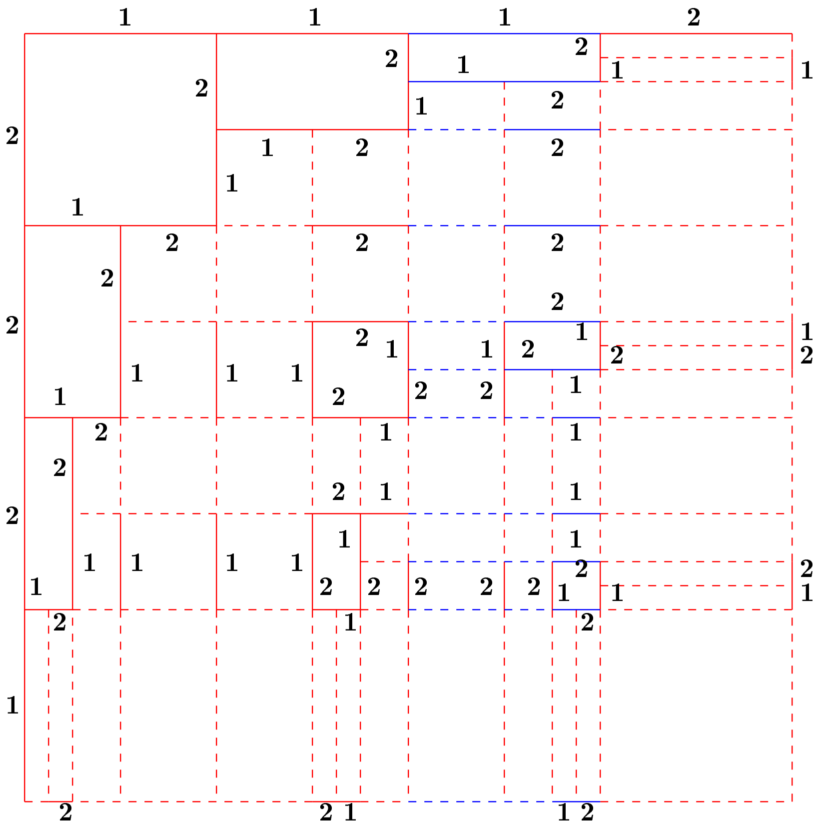
Lemma 10 $\rightarrow$ *is confluent voor vlechten bestaande uit drie strengen.*

Bewijs Breidt R uit met de regels:

$$
\begin{array}{lcl}
o & \rightarrow & \mathbf{1}(\mathbf{2}(o)) \\
o & \rightarrow & \mathbf{2}(\mathbf{1}(o))
\end{array}
$$

De herschrijfrelatie van de met deze regels corresponderende ARS (op analoge wijze verkregen als $\rightarrow$) duiden we aan met $\circ\!\!\rightarrow$.

[6] Deze subsectie is gebaseerd op [Zan95].



Figuur 5: Kanonieke tegeling voor de vlechten **1112** en **2221**

1. Omdat $o \rightarrow_R \mathbf{1}(o) \rightarrow_R \mathbf{1}(\mathbf{2}(o))$ en $o \rightarrow_R \mathbf{2}(o) \rightarrow_R \mathbf{2}(\mathbf{1}(o))$ is confluentie van $\rightarrow$ gelijk aan confluentie van $\multimap\!\!\!\rightarrow$.

2. Eenvoudig is na te gaan dat alle 'kritieke paren' van $\multimap\!\!\!\rightarrow$ convergent zijn *in één of nul stappen*. Met andere woorden $\multimap\!\!\!\rightarrow$ is subcommutatief ($\mathrm{CR}^{\leq 1}$) en dus confluent [DI, Theorem 1.1.8.(iv)].

Confluentie van $\rightarrow$ volgt door beide onderdelen te combineren. $\square$

Het algemene bewijs idee is om uitgaande van de regels R net zolang regels toe te voegen totdat in de corresponderende ARS alle 'kritieke paren' *in één of nul stappen* convergent zijn, en confluentie volgt. We noemen dit een completeringsproces, want net als bij Knuth-Bendix completering worden er regels aan het oorspronkelijke herschrijfsysteem toegevoegd (die de gegenereerde equivalentie niet veranderen!) totdat het herschrijfsysteem aan een bepaalde voorwaarde voldoet (dit proces kan falen/oneindig lang doorgaan). In het geval van Knuth-Bendix completering is de voorwaarde dat het herschrijfsysteem lokaal confluent en terminerend is (beginnend met een terminerend systeem), terwijl hier de voorwaarde is dat het herschrijfsysteem de diamant eigenschap heeft (beginnend met een lokaal confluent systeem).

Opgave 11 *1. Waarom is Knuth-Bendix completering hier niet zinvol?*

2. *Beschrijf wat er gebeurt als een lokaal confluent en terminerend herschrijfsysteem gecompleteerd wordt.*

3. *Laat zien hoe het standaardbewijs van confluentie voor orthogonale termherschrijfsystemen gezien kan worden als zijnde verkregen door completering.*

In het geval $n = 3$ stopt het completeringsproces van vlechten na twee regels al, zoals in het bewijs van Lemma 10 is aangetoond. En voor kleine n kan eenvoudig per computer nagegaan worden dat het proces steeds stopt.[7] In het volgende (lange) voorbeeld wordt dit proces uitgevoerd voor vlechten met vier strengen.

Voorbeeld 12 *De initiële TRS voor vlechten met vier strengen heeft als regels:*

$$\begin{aligned} o &\rightarrow \mathbf{1}(o) \\ o &\rightarrow \mathbf{2}(o) \\ o &\rightarrow \mathbf{3}(o) \end{aligned}$$

Aangezien alle linkerkanten van (gegenereer)de regels o zijn, kunnen we de regels d.m.v. de (string-)representatie voor hun rechterkanten aanduiden:

$$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$$

1. *In de eerste iteratie worden drie kritieke paren gegenereerd (op symmetrie en triviale paren na):* $\langle \mathbf{1}, \mathbf{2} \rangle, \langle \mathbf{2}, \mathbf{3} \rangle, \langle \mathbf{3}, \mathbf{1} \rangle$.
   Het paar $\langle \mathbf{1}, \mathbf{2} \rangle$ *kunnen we met behulp van* $\mathbf{21}$ *en* $\mathbf{12}$ *afmaken tot een elementair diagram (het middelste diagram in Figuur 4). Volgens het boven beschreven proces voegen we:* $\mathbf{21}$ *en* $\mathbf{12}$ *toe aan de verzameling regels. Evenzo leidt het kritieke paar* $\langle \mathbf{2}, \mathbf{3} \rangle$ *tot toevoeging van de regels:* $\mathbf{32}, \mathbf{23}$. *Het kritieke paar* $\langle \mathbf{3}, \mathbf{1} \rangle$ *kunnen we afmaken met behulp van* $\mathbf{1}$ *en* $\mathbf{3}$ *(het rechter diagram in Figuur 4), wat niet tot uitbreiding van de verzameling regels leidt. Dus deze iteratie leidt tot toevoeging van de regels:*

   $$\mathbf{21}, \mathbf{12}, \mathbf{32}, \mathbf{23}$$

2. *In de tweede iteratie worden drie maal vier kritieke paren verkregen door combinatie van oude en nieuwe regels:* $\langle \mathbf{i}, \mathbf{12} \rangle, \langle \mathbf{i}, \mathbf{21} \rangle, \langle \mathbf{i}, \mathbf{23} \rangle, \langle \mathbf{i}, \mathbf{32} \rangle$,
   voor $1 \leq i \leq 3$. *Tegelen met de elementaire diagrammen in Figuur 4 levert voor* $i = 1$ *de nieuwe regels:*

   $$\mathbf{2132}, \mathbf{123}, \mathbf{321}$$

[7] Dit lost dus het probleem van de ouders in praktische zin op.

op. $i = 2$ levert geen nieuwe regels op. Het geval $i = 3$ blijkt (modulo E) exact dezelfde regels als $i = 1$ op te leveren, dus niets nieuws. Door combinaties van nieuwe regels worden nog eens zes kritieke paren verkregen, op triviale en symmetrische paren na. Als we ook nog opmerken, dat het probleem symmetrisch in $\mathbf{1}$ *en* $\mathbf{3}$ *is (d.w.z. overal de verwisseling* $\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{3}$ *uitvoeren behoudt de correctheid van diagrammen), dan hoeven we slechts vier gevallen te beschouwen:* $\langle \mathbf{12}, \mathbf{21} \rangle, \langle \mathbf{12}, \mathbf{23} \rangle, \langle \mathbf{12}, \mathbf{32} \rangle, \langle \mathbf{21}, \mathbf{23} \rangle$.
Hiervan levert alleen het tweede paar, de niewe regel $\mathbf{132}$ *op. Dus deze tweede iteratie leidt tot toevoeging van de regels:*

$$\mathbf{2132}, \mathbf{123}, \mathbf{321}, \mathbf{132}$$

3. *In de derde iteratie worden de volgende nieuwe regels gevonden:*

$$\mathbf{13}, \mathbf{12321}, \mathbf{2321}, \mathbf{1213}$$

4. *In de vierde iteratie:*

$$\mathbf{213}, \mathbf{1321}, \mathbf{1232}, \mathbf{121}, \mathbf{232}$$

5. *In de vijfde iteratie:*

$$\mathbf{12132}, \mathbf{21321}$$

waarna de verzameling stabiel blijft, d.w.z. alle kritieke paren kunnen in ten hoogste één stap worden afgemaakt.

De uiteindelijke verzameling van (rechterkanten van) regels is:

$$\mathbf{1}, \mathbf{12}, \mathbf{123}, \mathbf{1232}, \mathbf{12321}, \mathbf{121}, \mathbf{1213}, \mathbf{12132}, \mathbf{13}, \mathbf{132}, \mathbf{1321}$$

$$\mathbf{2}, \mathbf{23}, \mathbf{232}, \mathbf{2321}, \mathbf{21}, \mathbf{213}, \mathbf{2132}, \mathbf{21321}, \mathbf{3}, \mathbf{32}, \mathbf{321}$$

Opgave 13 *Ga na dat alle uiteindelijke kritieke paren in Lemma 10 en het voorgaande voorbeeld convergent zijn* in één of nul stappen *(dit is veel werk in het geval van het voorbeeld).*

Om te bewijzen dat het completeringsproces altijd termineert is het handiger om eerst enige theorie te ontwikkelen.

3.2 Confluentie door Volledige Ontwikkelingen[8]

Zit er een regelmaat in de in Subsectie 3.1 gegenereerde regels? Kijkend naar de uiteindelijk verzamelingen regels, voor vlechten bestaande uit drie of vier strengen, merken we op dat alle rijtjes van de vorm $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$ respectievelijk $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$ zijn, waarbij $\mathbf{u}_i$ een (mogelijk leeg) prefix van $\mathbf{i} \ldots \mathbf{1}$ is, e.g. $\mathbf{32}$ is een mogelijke instantie van $\mathbf{u}_3$.

[8] Deze subsectie is gebaseerd op [Gar69].

Voorbeeld 14 *1. De stappen in Lemma 10 zijn alle van de vorm* $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$*:*

$$\widehat{\mathbf{1}}\,\widehat{\ }, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{2}}, \widehat{\ }\,\widehat{\mathbf{2}}, \widehat{\ }\,\widehat{\mathbf{21}}$$

Hierin bedekt het dakje ($\widehat{.}$) *steeds slagen in hetzelfde aflopende rijtje.*

2. *De stappen in het voorgaande voorbeeld zijn van de vorm* $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$ *(waarbij lege* $\mathbf{u}_i$ *weggelaten zijn):*

$$\widehat{\mathbf{1}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{2}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{3}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{32}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{321}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{21}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{3}},$$

$$\widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{32}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{3}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{32}}, \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{321}}, \widehat{\mathbf{2}}, \widehat{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{3}}, \widehat{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{32}},$$

$$\widehat{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{321}}, \widehat{\mathbf{21}}, \widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{3}}, \widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{32}}, \widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{321}}, \widehat{\mathbf{3}}, \widehat{\mathbf{32}}, \widehat{\mathbf{321}}$$

Omdat deze regelmaat geen toeval is, geven we een inductieve definitie van de rijtjes van de gewenste vorm.

Definitie 15 *Beschouw de ARS* $\langle \mathrm{Ter}(\Sigma)/E, \multimap\!\!\rightarrow \rangle$ *van* ontwikkelingen*, waarbij* $\multimap\!\!\rightarrow$ *gegenereerd wordt door (vgl. Definitie 6) de regels:*

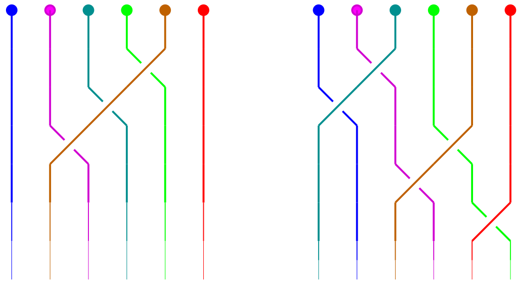
$$o \multimap\!\!\rightarrow \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n$$

waarbij voor alle $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{u}_i$ *een (mogelijk leeg) prefix van* $\mathbf{i} \ldots \mathbf{1}$ *is. Als we een rijtje aflopend van* i tot j *noteren als* $[i,j\rangle$*, dan is* $\mathbf{u}_i$ *dus van de vorm* $[i,j\rangle$*, voor zekere* $0 \leq j \leq i$*. Een ontwikkeling van de vorm* $[1,0\rangle[2,0\rangle[3,0\rangle \ldots [n,0\rangle = \widehat{\mathbf{1}}\widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{321}} \ldots \widehat{\mathbf{n} \ldots \mathbf{1}}$ *noemen we een* volledige *ontwikkeling en noteren we met* n^* *(zie Figuur 8).*

De notie van een volledige ontwikkeling wordt in [Gar69] ingevoerd onder de naam *fundamental word*. Zij speelt dezelfde rol als de notie van een *Gross-Knuth*-stap in de theorie van orthogonaal termherschrijven (inductief gedefinieerd in de stijl van Tait en Martin-Löf [Oos97a]).

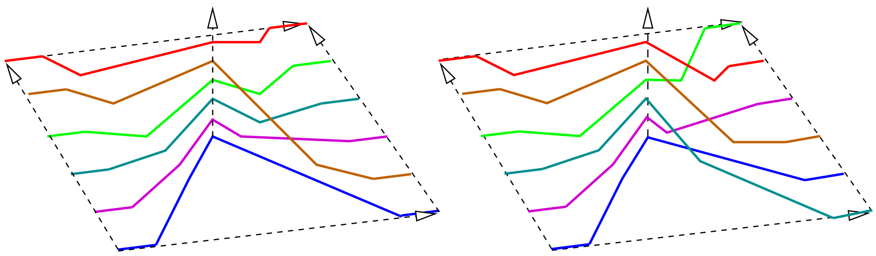
Dat dit allemaal nogal complex lijkt, wordt hoofdzakelijk veroorzaakt door de (1-dimensionale) representatie van vlechten door woorden. Als we kijken naar de 2-dimensionale representatie dan staat een rijtje van de vorm $[i,j\rangle$ voor een beweging van de $(i+1)^{ste}$ streng over $i-j$ aangrenzende strengen. Het rijtje $[4,1\rangle = \mathbf{432}$ kan bijvoorbeeld geïnterpreteerd worden als: Beweeg de vijfde streng drie strengen naar links (zie Figuur 6). Een ontwikkeling drukt dan uit dat ieder van de strengen *tegelijkertijd* een aantal slagen naar links bewogen mag worden. De rechtervlecht **42531** van het meisje in Figuur 3 is equivalent aan **21435**. Deze is van de gewenste vorm $\widehat{\mathbf{21}}\widehat{\mathbf{435}}$ (zie Figuur 6). De linkervlecht van het meisje daarentegen kan niet in de gewenste vorm gebracht worden (waarom niet?).

In de meest natuurgetrouwe representatie van vlechten als krommen in de $\mathbb{R}^3$ kan de intuïtie van slagen die tegenlijkertijd plaatsvinden, als volgt inzichtelijker geformaliseerd worden. Een *parallelle* slag ontstaat door:



Figuur 6: Twee ontwikkelingen: **432** en **21435** in 2D

- De strengen vanuit de beginpunten naar een centrale verticale as te laten lopen (zonder kruisen), zodanig dat een streng links van een andere streng lager op de as uitkomt.
- De strengen vanuit de centrale verticale as willekeurig naar de eindpunten te laten lopen (weer zonder kruisen).



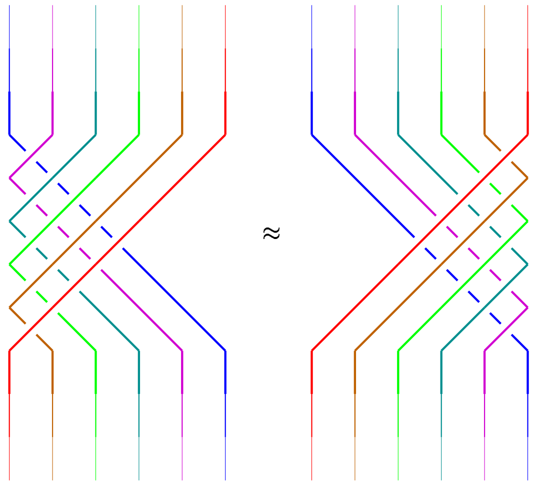
Figuur 7: Twee ontwikkelingen: **432** en **21435** in 3D

Als we de horizontale as als tijdsas nemen, dan zien we dat de slagen (het kruisen) ook werkelijk tegelijkertijd plaatsvinden in deze representatie! Het is nu ook eenvoudig te zien (letterlijk) waarom de linkervlecht van het meisje geen ontwikkeling is: De twee opeenvolgende slagen **33** kunnen niet tegelijkertijd gedaan worden.

We zullen bewijzen dat een willekeurige ontwikkeling altijd afgemaakt kan worden door middel van een andere ontwikkeling tot een volledige ontwikkeling. Dat dit confluentie impliceert volgt uit het zogenaamde *driehoek lemma* [Tak95].

Lemma 16 (Driehoek) *Een ARS $\langle A, \to \rangle$ heeft de* driehoekeigenschap*, als er een functie $.^* : A \to A$ is zodanig dat voor iedere $a, b \in A$ geldt:*

[9] Merk op dat de figuur in zichzelf getransformeerd wordt door een rotatie over 180 graden. Algemeen: ontwikkelingen zijn gesloten onder 'rotaties over 180 graden'.



Figuur 8: Een volledige ontwikkeling (in twee 2D representaties)[9]

1. *$a \to a^*$, en*
2. *als $a \to b$, dan $b \to a^*$.*

Een ARS die de driehoekeigenschap heeft is confluent. □

Opgave 17 *1. Bewijs het driehoek lemma.*

2. Hoeveel verschillende ontwikkelingen zijn er voor een gegeven aantal van n strengen?

Het volgende lemma is de sleutel tot confluentie en toont aan dat als een ontwikkeling afgemaakt kan worden tot een volledige ontwikkeling, dat dat ook geldt na het 'invoegen' van een streng (zie Figuur 9).

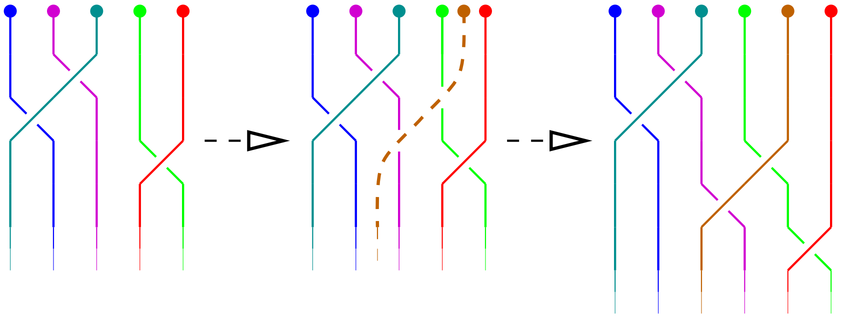
Definitie 18 *Het* invoegen $[i,j\rangle\rangle\mathbf{u}$ *van* $[i,j\rangle$ *in de* ontwikkeling $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$ *is gedefinieerd als:* $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{i-1}[i,j\rangle\tilde{\mathbf{u}_i} \dots \tilde{\mathbf{u}_n}$. *Hierin is* $\widetilde{[k,m\rangle}$ *gedefinieerd als* $[k+1,\tilde{m}\rangle$, *met* $\tilde{m} = m$ *als* $m < j$, *en* $\tilde{m} = m+1$ *anders.*

Per definitie levert invoegen in een ontwikkeling weer een ontwikkeling op.

Lemma 19 (Sleutel) *Laat* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$ *en* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n$ *ontwikkelingen zijn. Dan*

$$\mathbf{uv} =_E n^* \implies ([n+1,i\rangle\rangle\mathbf{u})([i,0\rangle\rangle\mathbf{v}) =_E (n+1)^*$$

voor alle $0 \le i \le n+1$.



Figuur 9: Insereren van een streng $[\mathbf{4},\mathbf{2}\rangle\!\rangle\mathbf{214} = \mathbf{21435}$

Bewijs

$$
\begin{array}{rcl}
([n+1,i\rangle\!\rangle\mathbf{u})([i,0\rangle\!\rangle\mathbf{v}) & = & ([n+1,i\rangle\!\rangle\mathbf{u})\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{i-1}[i,0\rangle\tilde{\mathbf{v}}_i\ldots\tilde{\mathbf{v}_n} \\
 & = & \mathbf{u}_1\ldots\mathbf{u}_n[n+1,i\rangle\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{i-1}[i,0\rangle\tilde{\mathbf{v}}_i\ldots\tilde{\mathbf{v}_n} \\
 & =_E & \mathbf{u}\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{i-1}[n+1,i\rangle[i,0\rangle\tilde{\mathbf{v}}_i\ldots\tilde{\mathbf{v}}_n \\
 & = & \mathbf{u}\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{i-1}[n+1,0\rangle\tilde{\mathbf{v}}_i\ldots\tilde{\mathbf{v}}_n \\
 & =_E & \mathbf{u}\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_i\ldots\mathbf{v}_n[n+1,0\rangle \\
 & = & \mathbf{u}\mathbf{v}[n+1,0\rangle \\
 & =_E & n^*[n+1,0\rangle \\
 & = & (n+1)^*
\end{array}
$$

□

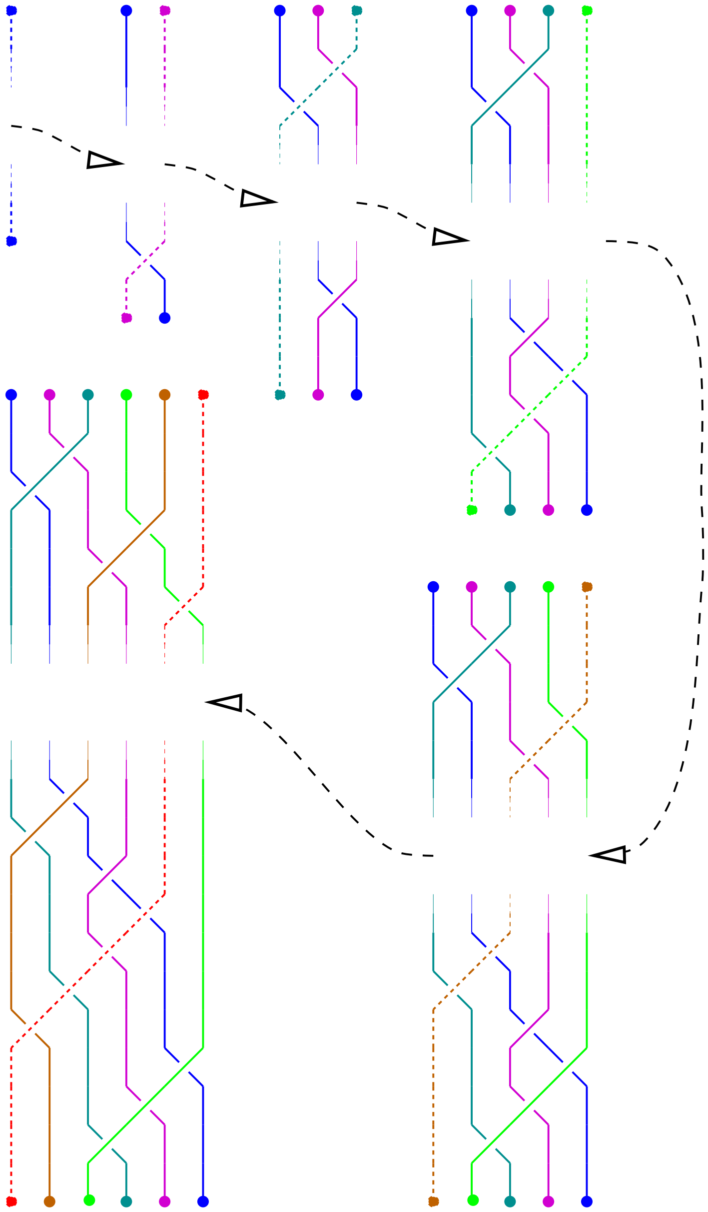
Stelling 20 *Vlechten is confluent.*

Bewijs Uit het driehoek lemma volgt dat het voldoende is om aan te tonen dat $\twoheadrightarrow$ de driehoekeigenschap heeft (waarom?). We bewijzen met inductie naar n, dat als $o \twoheadrightarrow \mathbf{u}$, dan $\mathbf{u} \twoheadrightarrow n^*$.

(0) In het basisgeval (één streng) geldt $\mathbf{u} = 0^* = o$.

$(n+1)$ In het inductiegeval kan de ontwikkeling per definitie geschreven worden als $[n+1,i\rangle\!\rangle\mathbf{u}$ voor zekere $0 \leq i \leq n+1$. Per inductie aanname weten we dat er een $\mathbf{v}$ bestaat zodanig dat $\mathbf{uv} =_E n^*$. Uit het sleutel lemma volgt dan dat $[i,0\rangle\!\rangle\mathbf{v}$ de gezochte ontwikkeling is. □

Opgave 21 *1. Laat zien dat invoegen in een ontwikkeling weer een ontwikkeling oplevert.*



Figuur 10: Inductief afmaken tot een volledige ontwikkeling

2. Toon de drie vlecht equivalenties in het bewijs van het sleutellemma aan.

Voorbeeld 22 *In Figuur 10 wordt de constructie in het bewijs van Stelling 20 geïllustreerd aan de hand van de rechtervlecht van het meisje in Figuur 3. Steeds wordt het invoegen van een stippelstreng in de bovenste van een paar vlechten 'gecompenseerd' door het invoegen van een stippelstreng in de onderste vlecht, zodanig dat ze samen een volledige ontwikkeling vormen.*

Hoewel Stelling 20 het probleem van de ouders algemeen oplost, zijn de gevonden oplossingen meestal niet optimaal; soms worden meer slagen gedaan dan nodig zou zijn om op twee equivalente vlechten uit te komen.

Voorbeeld 23 *Beschouw de vlechten* **1** *en* **3**, *beide op vier strengen. Ze kunnen afgemaakt worden tot een volledige ontwikkeling d.m.v. respectievelijk* **21321** *en* **12132**. *Het is efficiënter om ze af te maken d.m.v. respectievelijk* **3** *en* **1**.

In het vervolg zullen we aantonen dat tegelen met elementaire diagrammen altijd een oplossing produceert en verder o.a. dat deze oplossing ook minimaal is (m.b.t. het aantal benodigde slagen). Het eerste volgt uit het feit dat vlechten een *orthogonaal* herschrijfsysteem vormt. Het tweede uit het feit dat er bij vlechten geen *syntactische accidenten* zijn.

3.3 Orthogonaliteit van Parallelle Slagen[10]

We introduceren een alternatieve representatie van ontwikkelingen als relaties, *parallelle slagen* genoemd, en bewijzen dat deze relaties orthogonaal zijn.

De representatie is gebaseerd op de volgende observaties. Op ieder moment in een vlecht zijn de strengen van een vlecht geordend (van links naar rechts). Zo'n ordening noemen we een *toestand*. Een *parallelle slag* is een relatie over strengen. Parallelle slagen induceren transformaties op ordeningen, door ze te zien als specificaties van welke strengen elkaar dienen te kruisen.

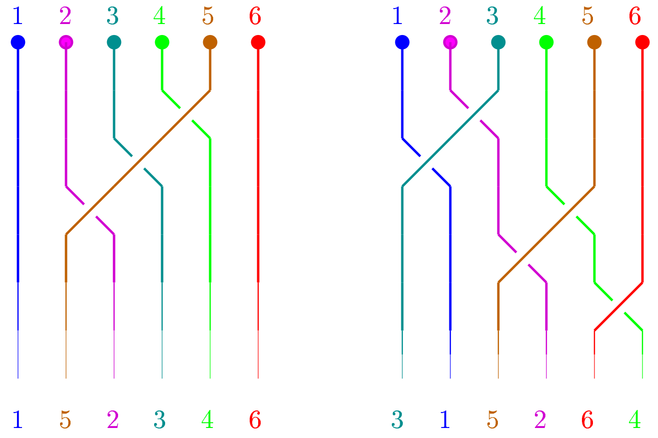
We definiëren een *som* ($\sqcup$) en een *residu* ($\backslash$) operatie op parallelle slagen. De som van twee parallelle slagen is de minimale gemeenschappelijke uitbreiding van de slagen. Het residu van een parallelle slag na een andere parallelle slag, is dat wat nog 'gedaan moet worden' na het 'doen' van de laatste om de gemeenschappelijke uitbreiding te bereiken. Orthogonaliteit zegt nu dat deze operaties voldoen aan de gelijkheden (zie Figuur 14)

$$\begin{aligned} (u \sqcup v) \setminus w &= (u \setminus w) \sqcup (v \setminus w) \quad \text{(Pijl)} \\ w \setminus (u \sqcup v) &= (w \setminus u) \setminus (v \setminus u) \quad \text{(Prisma)} \end{aligned}$$

voor willekeurige parallelle slagen u, v, en w. Dit is de hoofdstelling van deze subsectie.

Voor het gemak fixeren we het aantal strengen op n en de (namen van de) strengen op $\{1, \ldots, n\}$. Ordeningen van $\{1, \ldots, n\}$ kunnen gerepresenteerd worden door de strengen van klein naar groot (volgens de ordening) op te sommen.

[10] Deze subsectie is gebaseerd op [Mel].



Figuur 11: Parallelle slagen als transformaties op ordeningen

Voorbeeld 24 *De ordeningen* $< = 123456$ *en* $\ll = 315264$ *representeren respectievelijk de begin- en eindtoestand in de rechtervlecht in Figuur 11. Merk op dat het verschil* $v = < - \ll$ *(als relaties) van* $<$ *en* $\ll$ *bestaat uit de paren* $(1, 3), (2, 3), (2, 5), (4, 5), (4, 6)$. *Dit zijn precies de paren van elkaar kruisende strengen. Dit is geen toeval; b.v. ook het verschil* u *van de begin- en eindtoestand in de linkervlecht bestaat uit de paren kruisende strengen:* $(2, 5), (3, 5), (4, 5)$.

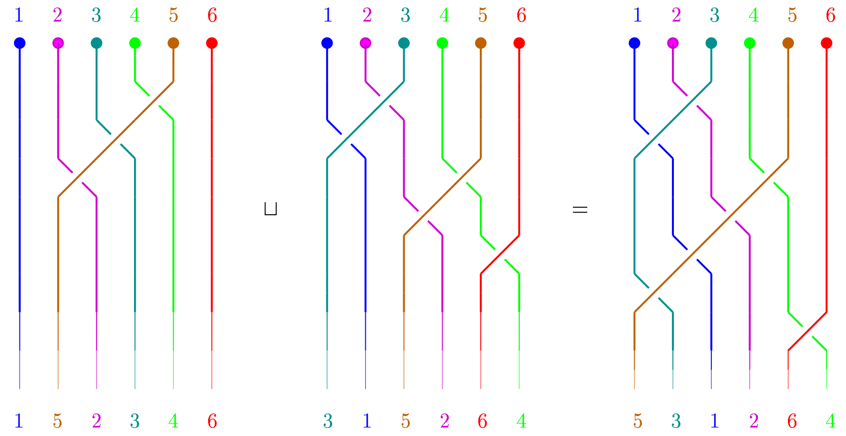
Definitie 25 *Een* toestand *is een irreflexieve, transitieve, totale relatie over* $\{1, \ldots, n\}$. *We gebruiken* $<, \ll, \lll$ *om toestanden aan te duiden. De* parallelle slag vanuit $<$ naar $\ll$ *is* $\complement\ll$. *Hier is* $\complement R = < - R$ *het* (relatieve) complement *van* R *ten op zichte van* $<$. *We gebruiken* u, v, *en* w *om parallelle slagen aan te duiden. De* werking $[R]$ *van* R *op* $<$ *is gedefinieerd door* $\complement R \cup R^\top$. *Hier is* $R^\top$ *de inverse van* R.[11]

Relatieve complementen worden steeds t.o.v. $<$ *genomen, tenzij anders vermeld. Tevens wordt aangenomen dat de relaties die we complementeren deelrelaties zijn van de relatie ten opzichte waarvan we complementeren.*

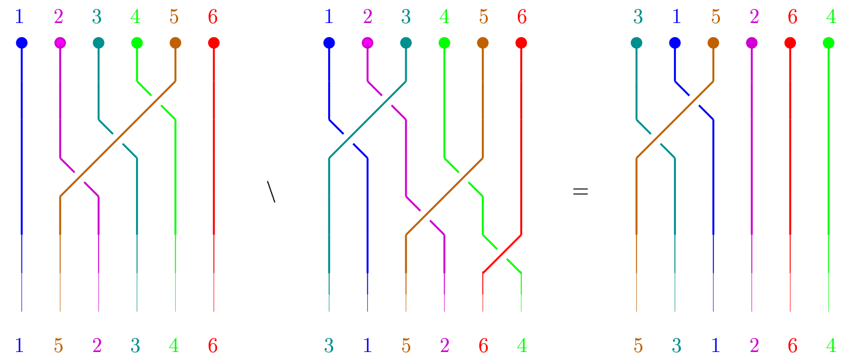
Parallelle slagen worden per definitie volledig bepaald door hun begin- en eindtoestand. Andersom geldt dat niet; b.v. de lege relatie is een parallelle slag vanuit iedere toestand naar zichzelf. Er geldt wel dat een parallelle slag tezamen met één van de toestanden, de andere volledig bepaald. In het bijzonder bepaalt de werking $[u]$ van een parallelle slag u op de begintoestand $<$, de eindtoestand (zoals we spoedig zullen aantonen).

Opgave 26 *Wat is de werking van de parallelle slag* $<$ *op* $<$?

[11] Als een relatie door een incidentiematrix worden gerepresenteerd, dan komt inverteren overeen met het $\top$ransponeren van de matrix.



Figuur 12: Som van parallelle slagen



Figuur 13: Residu van parallelle slagen

Voorbeeld 27 *Beschouw de parallelle slagen u en v in Voorbeeld 24. De vereniging van $u \cup v$ bestaat uit de paren $(1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (4, 6)$. Deze relatie is niet transitief (het paar $(1, 5)$ ontbreekt) en representeert ook geen parallelle slag. Het toevoegen van dit paar levert de parallelle slag in Figuur 12 op. De reden is intuïtief duidelijk: men kan niet zowel 1 en 3 als 3 en 5 kruisen zonder ook 1 en 5 te kruisen. Andersom geldt ook dat 1 en 6 elkaar niet kruisen omdat 1 en 2, en 2 en 6 dat niet doen (zie Propositie 32).*

Het residu $v \setminus u$ van v na u bestaat uit de paren $(1, 5), (3, 5)$ (zie Figuur 13). Merk op dat als we de parallelle slagen u en $v \setminus u$ concateneren (dat kan), we een vlecht krijgen die equivalent is met de parallelle slag $u \sqcup v$.

Definitie 28 *Laten R en S relaties zijn.*

1. *De* som *$R \sqcup S$ van R en S is gedefinieerd door $(R \cup S)^+$.*

2. *Het* residu $S \setminus R$ *van* S *na* R *is gedefinieerd door* $(R \sqcup S) - R$.

3. S *is* bevat in R, *als* $S \setminus R = \varnothing$. *Dit noteren we met* $S \sqsubseteq R$. *Als ook* $R \sqsubseteq S$, *dan zijn* R *en* S permutatie equivalent, *genoteerd met* $R \equiv S$.

De definitie van de som operatie $\sqcup$ op slagen kan als volgt begrepen worden. In een minimale uitbreiding van twee parallelle slagen u en v zullen in ieder geval die strengen elkaar dienen te kruisen die in één van beide slagen elkaar kruisen. Dit verklaart de $\cup$ in $(u \cup v)^+$. Het enige probleem is dan nog dat deze relatie niet transitief behoeft te zijn, in welk geval zij geen parallelle slag representeert. Het nemen van de transitieve afsluiting blijkt te volstaan om een parallelle slag te verkrijgen. Dit verklaart de $\cdot^+$ in $(u \cup v)^+$.

De definitie van het residu $v \setminus u$ van v na u door middel van de expressie $(u \sqcup v) - u$, kan gezien worden als een letterlijke vertaling van de zinsnede 'dat wat nog gedaan moet worden na het doen van de laatste (u) om de gemeenschappelijke uitbreiding ($u \sqcup v$) te bereiken'.

Propositie 29 (Halftralie)

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
R \sqcup R & = & R & R \setminus R & = & \varnothing \\
R \sqcup \varnothing & = & R & R \setminus \varnothing & = & R \\
R \sqcup S & = & S \sqcup R & \varnothing \setminus R & = & \varnothing \\
R \sqcup (S \sqcup T) & = & (R \sqcup S) \sqcup T & & &
\end{array}$$

voor relaties R, S, *en* T *(*R *dient transitief te zijn voor idempotentie en de gelijkheden waarin* $\varnothing$ *voorkomt).*

Bewijs Dat $\sqcup$ een halftralie is (i.e. de eigenschappen van $\sqcup$) volgt eenvoudig uit het corresponderende feit voor $\cup$ en monotonie eigenschappen van $\cdot^+$. De eigenschappen van $\setminus$ volgen uit de corresponderende eigenschappen van $-$ op relaties en uit de eerdere eigenschappen van $\sqcup$. $\square$

We dienen alleen nog aan te tonen dat de som en residu operaties toegepast op parallelle slagen, weer parallelle slagen opleveren. Daartoe geven we eerst een karakterisering van parallelle slagen als relaties met bepaalde eigenschappen. Merk op dat $\complement{\ll} = {<} \cap {\ll}^\top$, vanwege totaliteit van $\ll$ en irreflexiviteit van $<$. Hieruit volgt direkt dat parallelle slagen irreflexief en transitief zijn. Deze twee condities zijn echter niet voldoende om parallelle slagen volledig te karakteriseren. Het paar $(1, 3)$ is irreflexief en transitief, maar representeert geen slag vanuit 123. Het probleem is dat de 1^{ste} en 3^{de} streng elkaar niet kunnen kruisen zonder dat (minstens) één van beide de 2^{de} streng kruist (vgl. Voorbeeld 27). Om dit formeel te maken introduceren we *dualen* van operaties op relaties.

Definitie 30 (Duale) *De* duale $\complement f$ *van een* m*-aire functie* f *op relaties is gedefinieerd door* $(\complement f)(R_1, \ldots, R_m) = \complement(f(\complement R_1, \ldots, \complement R_m))$. *De dualen van afsluiting en transitief noemen we respectievelijk* inwendige *en* scopisch *[Mel]. Het scopisch inwendige van een relatie* R *noteren we als* R^-.

Merk op dat de noties (impliciet) afhangen van de relatie ten opzichte waarvan we het complement nemen. Het scopisch inwendige van het complement van een relatie is het complement van de transitieve afsluiting van de relatie.

Opgave 31 *1. Laat zien dat identiteit, inverse, subrelatie en doorsnede de dualen van respectievelijk complement, inverse, superrelatie en vereniging zijn.*

2. *Omschrijf de dualen van compositie (*decompositie*) en van som.*

3. *Toon aan dat een relatie R scopisch is desda voor alle $a < c < b$:*

$$a \; R \; b \;\Rightarrow\; a \; R \; c \text{ of } c \; R \; b.$$

In de volgende propositie presenteren we de alternatieve karakterisering van parallelle slagen alsmede twee (voor orthogonaliteit) essentiële eigenschappen.

Propositie 32 *Laten R, S, en T transitieve relaties zijn.*

1. *Als R een deelrelatie van de toestand $<$ is, dan*

$$R \text{ is een parallelle slag} \;\Leftrightarrow\; R \text{ is scopisch.}$$

2. $(R^-)^+ = R^-$.

3. *Als* $\complement R \subseteq S \cap T$, *dan* $(R \cap (S \cup T))^+ = R \cap (S \cup T)^+$.

Bewijs

1. ($\Rightarrow$) Stel $R = \complement\ll$ voor zekere toestand $\ll$. Dan is $\complement R = \ll$ transitief vanwege transitiviteit van $\ll$. Scopiciteit volgt nu direct uit de definitie.

   ($\Leftarrow$) We tonen eerst aan dat $[R] = \complement R \cup R^\top$ een toestand is.
   - Als $<$ totaal is, dan ook $\complement Q \cup Q^\top$ voor willekeurige Q.
   - $R^\top$ is een deelrelatie van de irreflexieve relatie $>$.
   - Om transitiviteit aan te tonen volstaat het om aan te tonen dat de vier mogelijke composities van $\complement R$ en $R^\top$ bevat zijn in $[R]$. De componenten $\complement R$ en $R^\top$ zijn ieder transitief, vanwege scopiciteit en transitiviteit respectievelijk van R. Rest nog te bewijzen dat de beide 'kruiscomposities' $\complement R \,;\, R^\top$ en $R^\top \,;\, \complement R$ bevat zijn in $[R]$. Hiervan tonen we alleen de eerste aan. Laat $a \; (\complement R) \; c \; R^\top \; b$.

     $(a = b)$ kan niet het geval zijn,

     $(a < b)$ dan $a \; \complement R \; b$ vanwege transitiviteit van R,

     $(b < a)$ dan $b \; R \; a$ vanwege scopiciteit van R.

   Eenvoudig volgt dat R de parallelle slag vanuit $<$ naar $[R]$ is.

2. Aangezien de transitieve afsluiting van een relatie de relatie zelf omvat dienen we de inclusie $(R^-)^+ \subseteq R^-$ aan te tonen. Het complement van R^- is $(\complement R)^+$, dus als de inclusie niet zou gelden dan bestaat er een minimale m, waarvoor er a, b, en c bestaan zodanig dat $a \; R^- \; c \; R^- \; b$ en $a \; (\complement R)^m \; b$.

(1) Stel $a \complement R\, b$. Aangezien $R^- \subseteq R$ volgt $a\ R\ c\ R\ b$ uit de hypothese en dus vanwege transitiviteit van R ook $a\ R\ b$. Tegenspraak.

(>1) Stel $a\ (\complement R)^{m_1}\ c'\ (\complement R)^{m_2}\ b$ voor zekere c', met $1 \leq m_1, m_2 < m$. Vanwege totaliteit van $<$ mogen we z.b.d.a. aannemen dat $c < c'$.

- Als $c\ (\complement R)^+\ c'$, dan uit $c'\ (\complement R)^{m_2}\ b$ ook $c\ (\complement R)^+\ b$. Tegenspraak.
- Als $c\ R^-\ c'$, dan $a\ R^-\ c\ R^-\ c'$. Uit $a\ (\complement R)^{m_1}\ c'$ volgt een tegenspraak met de inductiehypothese aangezien $m_1 < m$.

3. ($\subseteq$) $(R \cap (S \cup T))^+ \subseteq R^+ \cap (S \cup T)^+ = R \cap (S \cup T)^+$.

($\supseteq$) Kies een minimale m, en a en b waarvoor $a\ R\ b$ en $a\ (S \cup T)^m\ b$, maar niet $a\ (R \cap (S \cup T))^+\ b$.

(1) $a\ (S \cup T)\ b$ leidt linea directa tot tegenspraak.

(>1) Laat $a\ (S \cup T)^{m_1}\ c\ (S \cup T)^{m_2}\ b$ voor zekere c, met $1 \leq m_1, m_2 < m$. Het volstaat om $a\ R\ c$ en $c\ R\ b$ te bewijzen, omdat we dan de inductiehypotheses kunnen toepassen op beide componenten. Stel b.v. $a \complement R\, c$. Dan $a\ (S \cap T)\ c$ (m.b.v. de conditie) en uit $c\ (S \cup T)^{m_2}\ b$ volgt $a\ (S \cup T)^{m_2}\ b$ vanwege transitiviteit van S en T. Tegenspraak (met de minimaliteit van m). $\Box$

Opgave 33 *1. Wat gebeurt er bij een niet-eindig aantal strengen?*

2. Propositie 32.2 kunnen we cryptisch uitdrukken als $+-+ = +-$. Duaal geldt $-+- = -+$. We weten verder ook dat $++ = +$ en dus $-- = -$. Geef een voorbeeld waarvoor $-+ \neq +-$.

Lemma 34 *Als u en v parallelle slagen vanuit $<$ zijn, dan is*

1. $u \sqcup v$ de parallelle slag vanuit $<$ naar $[u \sqcup v]$, en

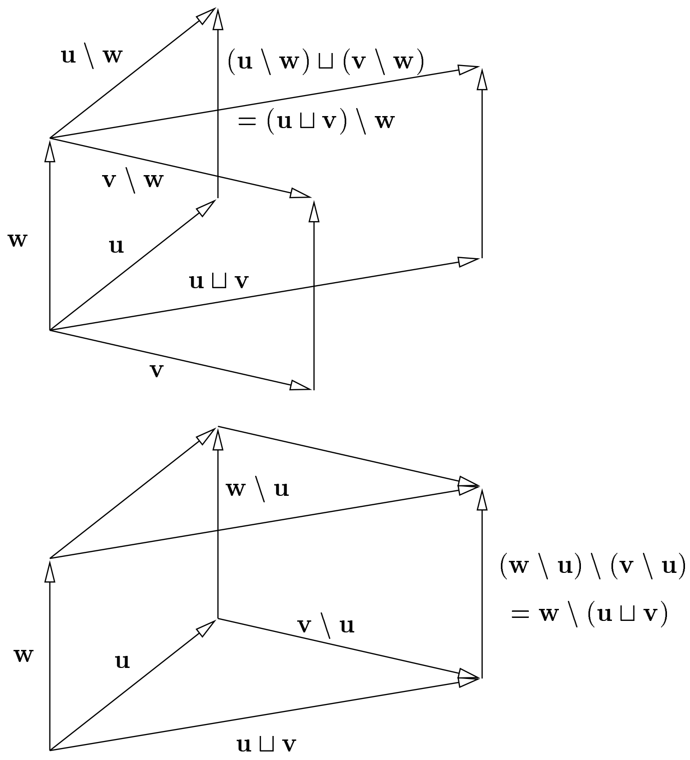
2. $v \setminus u$ de parallelle slag vanuit $[u]$ naar $[u \sqcup v]$.

Bewijs

1. Aangezien $u \sqcup v$ duidelijk een transitieve deelrelatie van $<$ is, volstaat het volgens Propositie 32.1 om aan te tonen dat zij ook scopisch is. $u \cup v$ is als vereniging van twee scopische relaties scopisch (duaal aan het feit dat de doorsnede van twee transitieve relaties transitief is). Dus $u \sqcup v = (u \cup v)^+$ is als transitieve afsluiting van een scopische relatie, zelf weer scopisch uit (de duale van) Propositie 32.2.

2. Uitschrijven van de definitie van de parallelle slag vanuit $[u]$ naar $[u \sqcup v]$, geeft $(\complement u \cup u^\top) \cap (\complement(u \sqcup v) \cup ((u \sqcup v)^\top))^\top$. Gebruikmakend van $u \subseteq u \sqcup v \subseteq <$ en totaliteit van $<$ calculeren we eenvoudig dat deze expressie gelijk is aan $(u \sqcup v) - u$. $\Box$

Orthogonaliteit van een herschrijfsysteem wordt tot uitdrukking gebracht in de zogenaamde *prisma stelling* [Hue94], die ruwweg zegt dat het residu van een parallelle slag na een andere, onafhankelijk is van de manier waarop we één van beide opdelen (zie Figuur 14).



Figuur 14: Pijl en Prisma

Stelling 35 (Pijl en Prisma) *Als u, v, en w parallelle slagen vanuit $<$ zijn:*

$$\begin{aligned}(u \sqcup v) \setminus w &= (u \setminus w) \sqcup (v \setminus w)\\ w \setminus (u \sqcup v) &= (w \setminus u) \setminus (v \setminus u)\end{aligned}$$

Bewijs

1. $$\begin{aligned}(u \sqcup v) \setminus w &= (u \sqcup v \sqcup w) - w\\ &= ((u \sqcup w) \cup (v \sqcup w))^+ - w\\ &= (((u \sqcup w) \cup (v \sqcup w)) - w)^+\\ &= (((u \sqcup w) - w) \cup ((v \sqcup w) - w))^+\\ &= (u \setminus w) \sqcup (v \setminus w)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2. \quad (w \setminus u) \setminus (v \setminus u) &= ((w \setminus u) \sqcup (v \setminus u)) - (v \setminus u) \\
&= (((w \sqcup u) - u) \cup ((v \sqcup u) - u))^+ - (v \setminus u) \\
&= (((w \sqcup u) \cup (v \sqcup u)) - u)^+ - (v \setminus u) \\
&= (((w \sqcup u) \cup (v \sqcup u))^+ - u) - (v \setminus u) \\
&= ((w \sqcup v \sqcup u) - u) - ((v \sqcup u) - u) \\
&= (w \sqcup v \sqcup u) - (v \sqcup u) \\
&= w \setminus (u \sqcup v)
\end{aligned}
$$

De gelijkheden zijn alle het gevolg van de algebraïsche eigenschappen, op respectievelijk de derde en vierde gelijkheid na, waarin van Propositie 32.3 gebruik gemaakt wordt. Merk op dat w en u transitief zijn vanwege (de duale van) Propositie 32.1. □

Opgave 36 *Vat de prisma en pijl gelijkheden op als herschrijfregels (van links naar rechts). Is het resulterende termherschrijfsysteem compleet?*

Propositie 37 *1.* $\sqsubseteq$ *is een quasi-ordening,*

2. $u \sqsubseteq u \sqcup v$*, en*

3. $u = v \iff u \equiv v$*.*

Bewijs

1. Reflexiviteit volgt direct uit Propositie 29. Stel $u \sqsubseteq v \sqsubseteq w$. Dan

$$u \setminus w = u \setminus (v \sqcup w) = (u \setminus v) \setminus (w \setminus v) = \varnothing \setminus (w \setminus v) = \varnothing$$

uit de prisma stelling, en dus is $\sqsubseteq$ transitief.

2. Eenvoudig uit de prisma stelling en Propositie 29.

3. Uitschrijven van de definities en $u = v \iff u \subseteq v \,\&\, v \subseteq u$. □

3.4 Orthogonaliteit van Multiderivaties[12]

In de voorgaande subsectie hebben we gezien dat parallelle slagen orthogonaal zijn. In deze subsectie construeren we een orthogonaal systeem voor *rijen van parallelle slagen*. Dit is een instantie van de algemene constructie in [HL91] om uit een orthogonaal systeem voor elementaire stappen (hier: parallelle slagen), een orthogonaal systeem voor rijen van elementaire stappen (hier: multiderivaties) te construeren.

Definitie 38 Multiderivaties *(U, V, W, ...) worden gegenereerd door de volgende clausules:*

[12] Deze subsectie is gebaseerd op [HL91, KV]

1. *Een* nul *multiderivatie vanuit* $<$ *naar* $<$, *aangeduid met* $0_<$, *of ook* 0 *als* $<$ *afgeleid kan worden uit de context.*

2. *Voor iedere parallelle slag* u *vanuit* $<$ *naar* $\ll$, *is er een* elementaire *multiderivatie* $\langle u \rangle$ *vanuit* $<$ *naar* $\ll$.[13]

3. *Voor multiderivaties* U *vanuit* $<$ *naar* $\ll$ *en* V *vanuit* $\ll$ *naar* $\lll$, *is er een* samengestelde *multiderivatie* $U\,;V$ *vanuit* $<$ *naar* $\ll$.

Multiderivaties worden modulo de gelijkheden voor monoïden bekeken:

$$\begin{aligned} 0\,;U &= U \\ U\,;0 &= U \\ (U\,;V)\,;W &= U\,;(V\,;W) \end{aligned}$$

Laten U, V, *en* W *multiderivaties, en* u, v *parallelle slagen zijn, alle vanuit dezelfde toestand.*

1. *De* residu *operatie* $\setminus$ *is gedefinieerd door:*

$$\begin{aligned} U \setminus 0 &= U \\ 0 \setminus U &= 0 \\ \langle u \rangle \setminus \langle v \rangle &= \langle u \setminus v \rangle \\ (U\,;V) \setminus W &= (U \setminus W)\,;(V \setminus (W \setminus U)) \\ U \setminus (V\,;W) &= (U \setminus V) \setminus W \end{aligned}$$

2. *De* som *operatie* $\sqcup$ *is gedefinieerd door* $U \sqcup V = U\,;(V \setminus U)$.

3. *De equationele theorie verkregen door het toevoegen van de gelijkheid* $0 = \langle \varnothing \rangle$, *noteren we met* $=_\varnothing$. U *is* bevat in V, $U \sqsubseteq V$, *als* $U \setminus V =_\varnothing 0$. *Ze zijn* permutatie equivalent, $U \equiv V$, *als ook* V *bevat is in* U.

De grootte *van de nul multiderivatie en van elementaire multiderivaties is* 1, *de grootte van een samengestelde multiderivatie is de som van de groottes van de delen, en de grootte van het residu van een multiderivatie na een andere is de grootte van de eerste. De grootte van* U *duiden we aan met* $|U|$.

Merk op dat het a priori onduidelijk is dat de residu operatie wel-gedefinieerd is: b.v. in het geval $(U\,;U') \setminus (V\,;V')$ zijn er twee clausules van toepassing.

Propositie 39 *De residu operatie op multiderivaties is wel-gedefinieerd.*

Bewijs Oriënteer de monoïde gelijkheden en de definiërende gelijkheden van de residu operatie van links naar rechts. We zullen aantonen dat dit een compleet termherschrijfsysteem oplevert. Het bewijzen van lokale confluentie is een kwestie van casuïstiek. We gaan hier twee interessante gevallen van overlap tussen regels na.

[13] I.h.a. dienen voor deze constructie elementaire multiderivaties eerst uitgedeeld te worden naar (elementaire) permutatie equivalentie. Propositie 37 zegt echter dat permutatie equivalentie samenvalt met gelijkheid in het geval van parallelle slagen.

1. De term $(U\,;U')\setminus(V\,;V')$ kunnen we op twee manieren herschrijven:

$$\begin{array}{ll}\to & ((U\,;U')\setminus V)\setminus V' \\ \to & ((U\setminus V)\,;(U'\setminus(V\setminus U)))\setminus V' \\ \to & ((U\setminus V)\setminus V')\,;((U'\setminus(V\setminus U))\setminus(V'\setminus(U\setminus V)))\end{array}$$

en

$$\begin{array}{ll}\to & (U\setminus(V\,;V'))\,;(U'\setminus((V\,;V')\setminus U)) \\ \to & ((U\setminus V)\setminus V')\,;(U'\setminus((V\setminus U)\,;(V'\setminus(U\setminus V)))) \\ \to & ((U\setminus V)\setminus V')\,;((U'\setminus(V\setminus U))\setminus(V'\setminus(U\setminus V)))\end{array}$$

2. De term $((U\,;V)\,;W)\setminus U'$ kan als volgt herschreven worden:

$$\begin{array}{ll}\to & ((U\,;V)\setminus U')\,;(W\setminus(U'\setminus(U\,;V))) \\ \to & ((U\setminus U')\,;(V\setminus(U'\setminus U)))\,;(W\setminus((U'\setminus U)\setminus V))\end{array}$$

en

$$\begin{array}{ll}\to & (U\,;(V\,;W))\setminus U' \\ \to & (U\setminus U')\,;((V\,;W)\setminus(U'\setminus U)) \\ \to & (U\setminus U')\,;((V\setminus(U'\setminus U))\,;(W\setminus((U'\setminus U)\setminus V)))\end{array}$$

De analyse leert dat alle kritieke paren confluent zijn, en dus dat het herschrijfsysteem lokaal confluent is [DI, Lemma 2.4.9]. Terminatie is iets lastiger te bewijzen omdat directe toepassing van zowel de recursieve als de lexicografische pad ordening falen. Dit kan opgelost worden door de techniek van *semantische labellen*, waarbij de symbolen in een term/regel gelabeld mogen worden met labels die bepaald worden door een semantiek van de argumenten. De grootte van een term is een correcte semantiek in de zin dat hij nooit toeneemt door toepassing van een van de herschrijfregels (hij neemt alleen af voor de regels voor de nul). Het labellen van iedere residu operator met de som van de groottes van z'n argumenten, levert het volgende herschrijfsysteem op.

$$\begin{array}{rcl}0\,;U & \to & U \\ U\,;0 & \to & U \\ (U\,;V)\,;W & \to & U\,;(V\,;W) \\ U\setminus_{x+1}0 & \to & U \\ 0\setminus_{1+x}U & \to & 0 \\ \langle u\rangle\setminus_2\langle v\rangle & \to & \langle u\setminus v\rangle \\ (U\,;V)\setminus_{x+y+z}W & \to & (U\setminus_{x+y}W)\,;(V\setminus_{y+z}(W\setminus_{z+x}U)) \\ U\setminus_{x+y+z}(V\,;W) & \to & (U\setminus_{x+y}V)\setminus_{x+z}W\end{array}$$

Dit gelabelde herschrijfsysteem is eenvoudig met een lexicografische pad ordening terminerend te bewijzen. Hieruit volgt terminatie van het oorspronkelijke termherschrijfsysteem. Uit lokale confluentie en terminatie volgt m.b.v. Newman's Lemma ([DI, Theorem 1.1.8.(ii)]) confluentie en dus compleetheid. Merk tenslotte op dat 'residu-normaalvormen' bewaard blijven onder het toepassen van de 'monoïde regels', en dus (m.b.v. compleetheid) dat residuen welgedefinieerd zijn. $\square$

We gaan vervolgens na dat de residu en som operaties aan de gewenste gelijkheden voldoen.

Stelling 40 *Voor multiderivaties U, V, W geldt*

$$\begin{array}{rcll}
U \sqcup 0 & = & U & \\
0 \sqcup U & = & U & \\
U \setminus U & =_{\varnothing} & 0 & \\
U \sqcup U & =_{\varnothing} & U & \\
U & \sqsubseteq & U \sqcup V & \\
(U \sqsubseteq V) & \Longleftrightarrow & (V =_{\varnothing} V \sqcup U) & \\
U \sqcup V & \equiv & V \sqcup U & \\
W \setminus (V \sqcup U) & = & (W \setminus V) \setminus (U \setminus V) & \textit{(Prisma)} \\
(V \sqcup U) \setminus W & = & (V \setminus W) \sqcup (U \setminus W) & \textit{(Pijl)} \\
(U \sqcup V) \sqcup W & = & U \sqcup (V \sqcup W) &
\end{array}$$

$\sqsubseteq$ is een quasi-ordening, en $\equiv$ een equivalentie relatie die een congruentie relatie is voor de operaties ; en $\setminus$, en dus voor $\sqcup$.

Bewijs De eerste twee gelijkheden zijn eenvoudig. De derde gelijkheid wordt bewezen met inductie naar de opbouw van U, waarbij in het geval van een elementaire multiderivatie de gelijkheid $\langle\varnothing\rangle = 0$ benodigd is. Idempotentie van $\sqcup$ volgt eenvoudig uit de de derde gelijkheid. De twee volgende gelijkheden volgen uit

$$U \setminus (U \sqcup V) = U \setminus (U\,;\ldots) = (U \setminus U) \setminus \ldots =_{\varnothing} 0 \setminus \ldots = 0\ ,$$

$$(U \setminus V =_{\varnothing} 0) \implies V = V\,; 0 =_{\varnothing} V\,; (U \setminus V) = V \sqcup U\ , \text{ en}$$

$$(V =_{\varnothing} V \sqcup U) \implies U \setminus V =_{\varnothing} U \setminus (V \sqcup U) = (U \setminus V) \setminus (U \setminus V) =_{\varnothing} 0$$

Commutatitiviteit van $\sqcup$ volgt uit

$$\begin{array}{rcl}
(U \sqcup V) \setminus (V \sqcup U) & = & (U\,; (V \setminus U)) \setminus (V\,; (U \setminus V)) \\
& = & ((U \setminus V) \setminus ((V \setminus U) \setminus (V \setminus U))) \setminus (U \setminus V) \\
& =_{\varnothing} & 0
\end{array}$$

Prisma volgt door simpelweg uitschrijven van definities. Uitschrijven van definities leert dat Pijl volgt uit de gelijkheid:

$$U \setminus (V \sqcup W) = U \setminus (W \sqcup V) \quad \text{(Kubus)}$$

welke we bewijzen met inductie naar de som van de groottes van U, V, en W. Als U, V, of W nul is, dan volgt Kubus uit de eerste twee gelijkheden. Als alle drie elementaire multiderivaties zijn, dan

$$\begin{aligned}
\langle u\rangle \setminus (\langle v\rangle \sqcup \langle w\rangle) &= \langle u\rangle \setminus (\langle v\rangle \setminus (\langle w\rangle \setminus \langle v\rangle)) \\
&= (\langle u\rangle \setminus \langle v\rangle) \setminus (\langle w\rangle \setminus \langle v\rangle) \\
&= \langle (u \setminus v) \setminus (w \setminus v)\rangle \\
&= \langle u \setminus (v \sqcup w)\rangle
\end{aligned}$$

vanwege de prisma stelling (voor parallelle slagen). Uit commutativiteit van $\sqcup$ (voor parallelle slagen) volgt het gestelde dan symmetrisch. Als één van U, V, of W samengesteld is, dan volgt Kubus steeds uit de inductiehypothese:

1. Als $U = U_1 \,; U_2$, dan

$$\begin{aligned}
(U_1 \,; U_2) \setminus (V \sqcup W) &= (U_1 \setminus (V \sqcup W)) \,; (U_2 \setminus ((V \sqcup W) \setminus U_1)) \\
&= (U_1 \setminus (W \sqcup V)) \,; (U_2 \setminus ((W \sqcup V) \setminus U_1)) \\
&= (U_1 \,; U_2) \setminus (W \sqcup V)
\end{aligned}$$

2. Als $V = V_1 \,; V_2$, dan

$$\begin{aligned}
U \setminus ((V_1 \,; V_2) \sqcup W) &= U \setminus (V_1 \,; (V_2 \sqcup (W \setminus V_1))) \\
&= (U \setminus V_1) \setminus (V_2 \sqcup (W \setminus V_1)) \\
&= (U \setminus V_1) \setminus ((W \setminus V_1) \sqcup V_2) \\
&= U \setminus (V_1 \,; ((W \setminus V_1) \sqcup V_2)) \\
&= U \setminus ((V_1 \sqcup W) \,; (V_2 \setminus (W \setminus V_1))) \\
&= (U \setminus (V_1 \sqcup W)) \setminus (V_2 \setminus (W \setminus V_1)) \\
&= (U \setminus (W \sqcup V_1)) \setminus (V_2 \setminus (W \setminus V_1)) \\
&= U \setminus (W \,; (V_1 \setminus W) \,; (V_2 \setminus (W \setminus V_1))) \\
&= U \setminus (W \sqcup (V_1 \,; V_2))
\end{aligned}$$

3. Het geval $W = W_1 \,; W_2$ wordt aan de lezer overgelaten. $\Box$

Associativiteit van $\sqcup$ volgt met behulp van Pijl uit

$$\begin{aligned}
(U \sqcup V) \sqcup W &= U \,; (V \setminus U) \,; (W \setminus (U \sqcup V)) \\
&= U \,; (V \setminus U) \,; ((W \setminus U) \setminus (V \setminus U)) \\
&= U \,; ((V \setminus U) \sqcup (W \setminus U)) \\
&= U \,; ((V \sqcup W) \setminus U) \\
&= U \sqcup (V \sqcup W)
\end{aligned}$$

Dat $\sqsubseteq$ een quasi-ordening is volgt uit het voorgaande, analoog aan Propositie 37. $\equiv$ is dus als doorsnede van twee quasi-ordeningen een equivalentie relatie. Dat het ook een congruentie relatie is volgt door eenvoudige pedipulatie uit het voorgaande. Stel $U \equiv U'$ en $V \equiv V'$. Dan

$$\begin{array}{ll} (U \setminus V) \setminus (U' \setminus V') & \\ \quad =_\varnothing & ((U \sqcup U') \setminus (V \sqcup V')) \setminus ((U' \sqcup U) \setminus (V' \sqcup V)) \\ \quad =_\varnothing & ((U \setminus (V \sqcup V')) \sqcup (U' \setminus (V \sqcup V'))) \setminus ((U' \setminus (V' \sqcup V)) \sqcup (U \setminus (V' \sqcup V))) \\ \quad =_\varnothing & 0 \end{array}$$

door toepassingen van Pijl en Kubus. Congruentie voor ; en $\sqcup$ zijn even gemakkelijk. $\square$

Dit alles zegt dus dat we een orthogonaal systeem voor multiderivaties hebben geconstrueerd. In de volgende subsectie relateren we parallelle slagen aan ontwikkelingen, multiderivaties aan vlechten, alsmede permutatie equivalentie aan vlecht equivalentie.

3.5 Confluentie door Orthogonaliteit

De in de voorgaande sectie geïntroduceerde notie van parallelle slag willen we natuurlijk relateren aan het normale vlecht begrip. We zullen laten zien dat, ten eerste, iedere gewone slag als een parallelle slag gezien kan worden en, ten tweede, dat parallelle slagen *ontwikkeld*[14] kunnen worden tot rijtjes van gewone slagen, waarbij permutatie equivalentie overgevoerd wordt in vlecht equivalentie. Vervolgens breiden we deze correspondentie tussen parallelle slagen en ontwikkelingen uit naar een correspondentie tussen multiderivaties en vlechten.

Definitie 41 *Laten u, v parallelle slagen vanuit $< = a_1 \ldots a_n$ zijn.*

1. *u is* elementair *als hij niet een som van (niet lege) parallelle slagen is. Vanwege scopiciteit betekent dit dat u van de vorm $\{(a_i, a_{i+1})\}$ is (twee aangrenzende strengen kruisen). We noemen $\mathbf{i}$ de* met u geassocieerde slag.

2. *Een* ontwikkeling *van de parallelle slag u is*

   ($\varnothing$) de triviale vlecht o als er geen elementaire slag mogelijk is, of

   ($\neg\varnothing$) een vlecht $\mathbf{iu}$, waarin $\mathbf{i}$ de slag geassocieerd met een elementaire slag v is zodanig dat $v \sqsubseteq u$, en waarin $\mathbf{u}$ een ontwikkeling van de parallelle slag $u \setminus v$ vanuit $[v]$ is. We kunnen dit zien als een toestandsovergang

   $$(<, u) \rightsquigarrow_i ([v], u \setminus v)$$

   van een toestand $<$ waarin u nog ontwikkeld moet worden, naar de toestand $[v]$ waarin v al gedaan is en alleen $u \setminus v$ nog ontwikkeld moet worden.

[14] De notie van ontwikkeling uit Subsectie 3.2 zal een speciaal (inductief gedefinieerd) geval van deze nieuwe notie van ontwikkeling blijken te zijn.

3. *De ARS* $\langle \mathrm{Ter}(\Sigma)/E, \multimap\!\!\rightarrow \rangle$ *van* ontwikkelingen *wordt gegenereerd door:*

$$o \multimap\!\!\rightarrow_u \mathbf{u}$$

waarbij $\mathbf{u}$ *een ontwikkeling van een willekeurige parallelle slag* u *is.*

4. *Een* ontwikkeling *van een multiderivatie* U *is*

   (0) o *als* $U = 0$,

   ($\langle\cdot\rangle$) *een ontwikkeling van* u *als* $U = \langle u \rangle$, *en*

   (;) $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$ *als* $\mathbf{U}_i$ *een ontwikkeling is van* U_i *en* $U = U_1 \, ; U_2$.

In Punt 3 van de definitie wordt het symbool $\multimap\!\!\rightarrow$ overladen (vgl. Definitie 15). We tonen in Propositie 51 aan dat dit geen kwaad kan. Merk tenslotte op dat in de definitie van ontwikkeling alleen de ordening van de strengen een rol speelt (de namen van de strengen zijn irrelevant), en we dus zonder beperking der algemeenheid mogen aannemen dat $< = 1 \ldots n$.

Voorbeeld 42 1. *Beschouw de parallelle slag* $(1,2),(1,3)$ *vanuit* 123. *Het paar* $(1,3)$ *is geen parallelle slag, maar het paar* $(1,2)$ *wel (waarom?) en er geldt* $\{(1,2)\} \setminus \{(1,2),(1,3)\} = \varnothing$. *Het residu van* $(1,2),(1,3)$ *na* $(1,2)$ *is de elementaire slag* $(1,3)$ *vanuit* 213. *De ontwikkeling die met het doen van achtereenvolgens* $(1,2)$ *en* $(1,3)$ *geassocieerd wordt is* **12**. *Dit is de enig mogelijke ontwikkeling.*

2. *De parallelle slag* $(1,2),(1,3),(2,3)$ *vanuit* 123 *heeft twee ontwikkelingen:* **121** *en* **212**.

Opgave 43 1. *Bereken voor de gevallen* $i = j$, $i = j+1$, *en* $i > j+1$, *de parallelle slag* $\{(i,i+1)\} \sqcup \{(j,j+1)\}$ *en haar mogelijke ontwikkelingen (als parallelle slag vanuit* $1 \ldots n$*). Vgl. deze met Figuur 4.*

2. *Een ontwikkeling van een multiderivatie is hier gedefinieerd als een rij van ontwikkelingen van de constituerende parallelle slagen. Laat zien dat ontwikkelingen behouden zijn onder de monoïde gelijkheden, maar niet onder permutatie equivalentie. Definieer een notie van* familie ontwikkeling *die behouden is onder permutatie equivalentie, zodanig dat alle familie ontwikkelingen eindig zijn (vgl. [Oos97b]).*

Lemma 44 *Laat* $\mathbf{u}$ *een ontwikkeling van de parallelle slag* u *vanuit* $<$ *zijn.*

1. $\mathbf{u}$ *is een prefix van een zekere ontwikkeling van* $u \sqcup v$, *voor iedere parallelle slag* v *van* $<$. *Als* $\mathbf{u}$ *bovendien eindig is, dan is het suffix een ontwikkeling van* $v \setminus u$.

2. $\mathbf{u}$ *is eindig (*$\rightsquigarrow$ *is terminerend).*

Bewijs

1. Voor het eerste deel volstaat het om aan te tonen dat als de condities van het lemma gelden, en er een stap $\mathbf{i}$ mogelijk is vanuit volgens u, dan is $\mathbf{i}$ ook mogelijk vanuit $u \sqcup v$ *en* we komen dan weer in een toestand die aan de condities voldoet. Laat w de elementaire slag vanuit $<$ zijn waarmee $\mathbf{i}$ geassocieerd is.

   (a) $w \sqsubseteq u \sqsubseteq u \sqcup v$, waarbij de tweede gelijkheid volgt uit de prisma stelling.

   (b) Net zoals $u \setminus w$ een parallelle slag vanuit $[w]$ is, is $(u \sqcup v) \setminus w$ dat ook. Tevens kan de laatste als de som $(u \setminus w) \sqcup (v \setminus w)$ geschreven worden vanwege de pijl stelling. Dus wordt na het doen van de slag $\mathbf{i}$ weer aan de condities voldaan.

   Voor het tweede deel volstaat het om op te merken dat ook geldt

$$\begin{aligned} v \setminus u &= v \setminus (w \sqcup u) \\ &= (v \setminus w) \setminus (u \setminus w). \end{aligned}$$

   vanwege de keuze van w en de prisma stelling. Want door herhaald toepassen volgt hieruit

$$\begin{aligned} v \setminus u &= (u \sqcup v) \setminus u \\ &= (\ldots((u \sqcup v) \setminus w_1) \ldots \setminus w_m) \setminus (\ldots(u \setminus w_1) \ldots \setminus w_m) \\ &= (\ldots((u \sqcup v) \setminus w_1) \ldots \setminus w_m) \end{aligned}$$

   waarbij $w_1, \ldots, w_m$ de elementaire slagen geassocieerd met de ontwikkeling $\mathbf{u}$ zijn. De laatste gelijkheid volgt uit het feit dat $\mathbf{u}$ een ontwikkeling van u is.

2. Laten R, S relaties zijn, met R transitief, zodanig dat $S \sqcup R = R$. Dan $R \setminus S = (R \sqcup S) - S = R - S$, en dus bevat $R \setminus S$ minder paren dan R (als S niet leeg is). Hieruit volgt direct dat de lengte van een ontwikkeling van een parallelle slag (ten hoogste) gelijk is aan het aantal paren in de parallelle slag. $\square$

Merk op dat het eerste deel van het lemma abstract is in de zin dat het voor een willekeurig orthogonaal systeem geldt, dus ook voor systemen waar ontwikkelingen niet noodzakelijkerwijs eindig zijn.[15] Om eindigheid te bewijzen was het dus noodzakelijk de definities te 'ontvouwen'.

Propositie 45 $\to \subseteq \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} \subseteq \twoheadrightarrow$.

Bewijs We bewijzen de twee inclusies.

[15] Denk aan oneindig veel strengen, of oneindige termen.

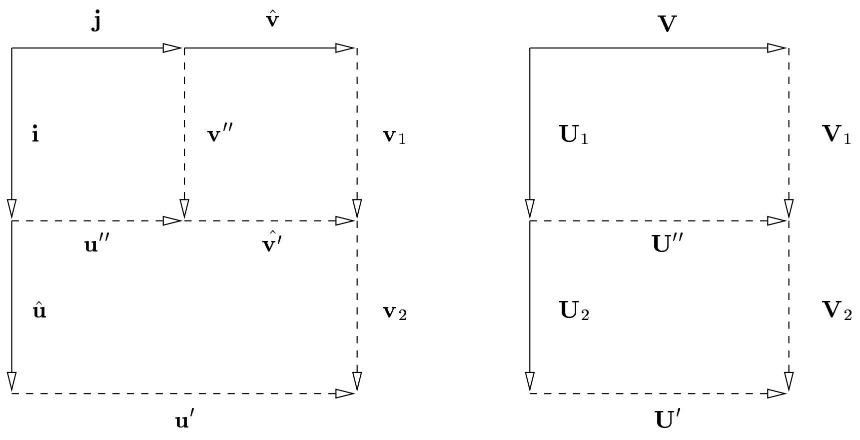
1. Een slag $\mathbf{i}$ is de ontwikkeling van de elementaire slag (a_i, a_{i+1}) vanuit $a_1 \ldots a_n$.
2. Per definitie van ontwikkelingen als rijen van slagen en Lemma 44, dat garandeert dat deze rijen eindig zijn. $\square$

In het geval van termherschrijven zegt deze propositie dat om confluentie van $\rightarrow$ aan te tonen, het voldoende is om te laten zien dat $\circ\!\!\!\longrightarrow$ de diamanteigenschap heeft. In het geval van vlechten zegt confluentie alleen niet zoveel, namelijk slechts dat de begin- en uiteinden van twee vlechten overeenstemmen, maar niets over hoe dat gedaan is. Uit het eerste onderdeel volgt wel dat we met iedere vlecht een multiderivatie kunnen associëren gevormd door de rij van elementaire parallelle slagen.

Lemma 46 *1. Laten u en v parallelle slagen vanuit $<$ zijn, met ontwikkelingen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Dan zijn er ontwikkelingen $\mathbf{u}'$ en $\mathbf{v}'$ van $v \setminus u$ en $u \setminus v$, zodanig dat $\mathbf{uu}' =_E \mathbf{vv}'$.*

2. Laten U en V multiderivaties vanuit $<$ zijn, met ontwikkelingen $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$. Dan zijn er ontwikkelingen $\mathbf{U}'$ en $\mathbf{V}'$ van $V \setminus U$ en $U \setminus V$, zodanig dat $\mathbf{UU}' =_E \mathbf{VV}'$.

Bewijs (zie Figuur 15).



Figuur 15: Equivalentie van ontwikkelingen

1. We bewijzen dit met welgefundeerde inductie naar de begintoestand $(<, u \sqcup v)$, geordend door $\rightsquigarrow^+$.
   - Als $u = \varnothing$, dan $\mathbf{u} = o$. Verder geldt $u \setminus v = \varnothing$ en $v \setminus u = \varnothing$, dus kunnen we nemen $\mathbf{u}' = \mathbf{v}$ en $\mathbf{v}' = o$.

- Het geval $v = \varnothing$ gaat symmetrisch aan het vorige geval.
- Als beide parallelle slagen niet leeg zijn, dan $\mathbf{u} = \mathbf{i}\hat{\mathbf{u}}$ en $\mathbf{v} = \mathbf{j}\hat{\mathbf{v}}$, voor slagen $\mathbf{i}$ en $\mathbf{j}$ geassocieerd met elementaire parallelle slagen i en j zodanig dat $i \sqsubseteq u$ en $j \sqsubseteq v$. Verder is $\hat{\mathbf{u}}$ een ontwikkeling van $u \setminus i$ en $\hat{\mathbf{v}}$ een ontwikkeling van $v \setminus j$. $\mathbf{i}$ en $\mathbf{j}$ zijn ook de eerste slagen van ontwikkelingen van $i \sqcup j$, zeg $\mathbf{iu}''$ en $\mathbf{jv}''$. Uit de inductiehypothese volgt dat er ontwikkelingen $\mathbf{v}_1$ van $i \setminus v$ en $\hat{\mathbf{v}'}$ van $v \setminus (i \sqcup j)$ bestaan zodanig dat $\hat{\mathbf{v}}\mathbf{v}_1 =_E \mathbf{v}''\hat{\mathbf{v}'}$. Nogmaals toepassen van de inductiehypothese levert ontwikkelingen $\mathbf{u}'$ en $\mathbf{v}_2$ zodanig dat $\mathbf{u}''\hat{\mathbf{v}'}\mathbf{v}_2 =_E \hat{\mathbf{u}}\mathbf{u}'$. Als we definiëren $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ dan volgt hieruit

$$\begin{aligned}
\mathbf{vv}' &=_E \mathbf{j}\hat{\mathbf{v}}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \\
&=_E \mathbf{jv}''\hat{\mathbf{v}'}\mathbf{v}_2 \\
&=_E \mathbf{iu}''\hat{\mathbf{v}'}\mathbf{v}_2 \\
&=_E \mathbf{i}\hat{\mathbf{u}}\mathbf{u}' \\
&=_E \mathbf{uu}'
\end{aligned}$$

2. We bewijzen dit met inductie naar de grootte van $U \sqcup V$ op natuurlijke wijze geordend.

   - Als één van beide de nul multiderivatie is, dan is het niet moeilijk om geschikte U' en V' te vinden.
   - Als beide elementaire multiderivaties zijn, dan volgt het gestelde uit het eerste onderdeel.
   - Als minstens één van U en V een samengestelde multiderivatie is, zeg $U = U_1 \,; U_2$, dan redeneren we als volgt. Uit de inductiehypothese volgt dat er ontwikkelingen $\mathbf{U}''$ en $\mathbf{V}_1$ van respectievelijk $V \setminus U_1$ en $U_1 \setminus V$ bestaan, zodanig dat $\mathbf{U}_1\mathbf{U}'' =_E \mathbf{V}\mathbf{V}_1$. Nogmaals de inductiehypothese toepassen levert ontwikkelingen $\mathbf{U}'$ en $\mathbf{V}_2$ van respectievelijk $V \setminus U$ en $U_2 \setminus (V \setminus U_1)$, zodanig dat $\mathbf{U}_2\mathbf{U}' =_E \mathbf{U}''\mathbf{V}_2$. Als we definiëren $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ dan volgt hieruit

$$\begin{aligned}
\mathbf{VV}' &=_E \mathbf{V}\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 \\
&=_E \mathbf{U}_1\mathbf{U}''\mathbf{V}_2 \\
&=_E \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\mathbf{U}' \\
&=_E \mathbf{UU}'
\end{aligned}$$

We kunnen nu een alternatief bewijs van confluentie van vlechten geven.

Bewijs [van Stelling 20] Ieder tweetal vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ kan als ontwikkelingen van zekere multiderivaties U en V gezien worden. Dan bestaan er volgens Lemma 46 ontwikkelingen $\mathbf{U}'$ en $\mathbf{V}'$ zodanig dat $\mathbf{UU}' =_E \mathbf{VV}'$. $\square$

Er geldt echter meer.

Gevolg 47 *Als de multiderivaties geassocieerd met twee vlechten permutatie equivalent zijn, dan zijn de vlechten equivalent.*

Bewijs Want en namelijk: als de multiderivaties U en V, geassocieerd met de vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$, permutatie equivalent zijn, dan per definitie $U \setminus V =_\varnothing 0$ en $V \setminus U =_\varnothing 0$. Het toevoegen van de regel $\langle\varnothing\rangle \to 0$ aan het herschrijfsysteem in het bewijs van Propositie 39 behoudt compleetheid. Verder geldt dat het toepassen van regels waarin 0 voorkomt (de twee monoïde regels en de toegevoegde regels) uitgesteld kan worden, waaruit volgt dat als voor een multiderivatie W geldt dat $W =_\varnothing 0$, dan $W = \langle\varnothing\rangle ; \ldots ; \langle\varnothing\rangle$, en dus dat o de enige ontwikkeling van W is. Volgens Lemma 46 bestaan er ontwikkelingen $\mathbf{U}'$ en $\mathbf{V}'$ van $U \setminus V$ en $V \setminus U$, zodanig dat $\mathbf{U}\mathbf{U}' =_E \mathbf{V}\mathbf{V}'$. Omdat we geconstateerd hadden dat $\mathbf{U}' = o = \mathbf{V}'$ volgt dus $\mathbf{U} =_E \mathbf{V}$. $\Box$

Dit geldt ook andersom.

Lemma 48 *Als twee vlechten equivalent zijn, dan zijn de met de vlecht geassocieerde multiderivaties permutatie equivalent.*

Bewijs Omdat permutatie equivalentie een equivalentie relatie is, volstaat het om dit te laten zien voor dit laten zien voor een elementaire vlecht equivalentie, d.w.z. het vervangen van één zijde van een elementair diagram door de andere. Dus stel $\mathbf{U} = \mathbf{W}_1\mathbf{U}'\mathbf{W}_2$, $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1\mathbf{V}'\mathbf{W}_2$, waarbij $(\mathbf{U}' = \mathbf{V}') \in E$. De met deze vlechten geassocieerde multiderivaties U en V kunnen we schrijven als: $U = W_1 ; U' ; W_2$ en $V = W_1 ; V' ; W_2$, waarin U' en V' de multiderivaties zijn geassocieerd met $\mathbf{U}'$ en $\mathbf{V}'$. We calculeren als volgt:

$$\begin{aligned} U \setminus V &= (W_1 ; U' ; W_2) \setminus (W_1 ; V' ; W_2) \\ &=_\varnothing (U' ; W_2) \setminus (V' ; W_2) \\ &=_\varnothing W_2 \setminus W_2 \\ &=_\varnothing 0 \ \Box \end{aligned}$$

Stelling 49 *Twee vlechten zijn equivalent dan en slechts dan als hun geassocieerde multiderivaties permutatie equivalent zijn.*

Bewijs Direct uit Gevolg 47 en Lemma 48. $\Box$

De stelling suggereert dat er residu en som operaties op vlechten gedefinieerd kunnen worden via de residu en som operaties op de geassocieerde multiderivaties. Het enige probleem is dan nog dat multiderivaties op velerlei manieren ontwikkeld kunnen worden tot vlechten. In de volgende subsectie construeren we geschikte (kanonieke) ontwikkelingen door middel van tegelen.

Opgave 50 *Geef een definitie van de notie* familie ontwikkeling *(vgl. Opgave 43) zodanig dat geldt:*

$$\mathbf{U} =_E \mathbf{V} \iff U \equiv V$$

Voor alle multiderivaties U en V en hun familie ontwikkelingen $\mathbf{U}$ *en* $\mathbf{V}$.

Tot slot van deze subsectie laten we nog zien dat het overladen van de definitie van ontwikkeling geen kwaad kon.

Propositie 51 *Ontwikkelingen in de zin van Definitie 15 zijn dat ook in de zin van Definitie 41.*

Bewijs Het bewijs is met inductie naar n

(0) De enige vlecht met één streng, o, is een ontwikkeling van $\varnothing$.

$(n+1)$ Beschouw de vlecht $\mathbf{u}[n+1,i\rangle$, waarbij $\mathbf{u}$ per inductieaanname een ontwikkeling is van een parallelle slag u vanuit $1\ldots n+1$ naar $a_1\ldots a_{n+1}$. Definieer dan de parallelle slag $u' = u \cup \{(a_m, n+2) \mid i < m \leq n+1\}$ vanuit $1\ldots n+2$ naar $a_1\ldots a_i n+2 a_{i+1}\ldots a_{n+1}$. Dit werkt. □

Opgave 52 *1. Maak het bewijs van Propositie 51 af.*

2. Geef de relatie behorend bij een volledige ontwikkeling van een vlecht van 4 strengen.

3.6 Orthogonaliteit van Vlechten[16]

We formaliseren het eerder intuïtief beschreven tegel proces in de vorm van een termherschrijfsysteem. Deze TRS wordt vervolgens gebruikt om residu en som operaties op vlechten te definëren, zodanig dat vlechten orthogonaal is. De constructie is abstract in de zin dat voor het wel-gedefinieerd zijn van het tegelproces, alleen vereist is dat parallelle slagen eindige ontwikkelingen hebben en dat tegelingen kanoniek zijn (omdat de elementaire diagrammen dat zijn).

Definitie 53 (Tegel TRS) Conversies *bestaan net als vlechten uit rijen van slagen* $\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$*, maar nu zijn ook de* inverse *slagen* $\mathbf{1}^\top, \ldots, \mathbf{n}^\top$ *toegestaan. De tegel regels hebben, voor willekeurige $1 \leq i, j \leq n$, als linkerkant* $\mathbf{i}^\top(\mathbf{j}(x))$ *en als rechterkant:*

$$\begin{array}{ll} x & \textit{als } |i-j| = 0 \\ \mathbf{j}(\mathbf{i}(\mathbf{j}^\top(\mathbf{i}^\top(x)))) & \textit{als } |i-j| = 1 \\ \mathbf{j}(\mathbf{i}^\top(x)) & \textit{als } |i-j| \geq 2 \end{array}$$

Voor een conversie x duiden we met $x{\downarrow}$, het 'positieve gedeelte' $\mathbf{U}$ *van de tegelnormaalvorm* $\mathbf{U}(\mathbf{V})^\top$ *van x aan.*

[16] Deze subsectie is gebaseerd op [Klo80, Oos94].

Merk op dat de regels corresponderen met de elementaire diagrammen van Figuur 4 en dat het toepassen van een regel overeenkomt met het 'tegelen' met een elementair diagram.

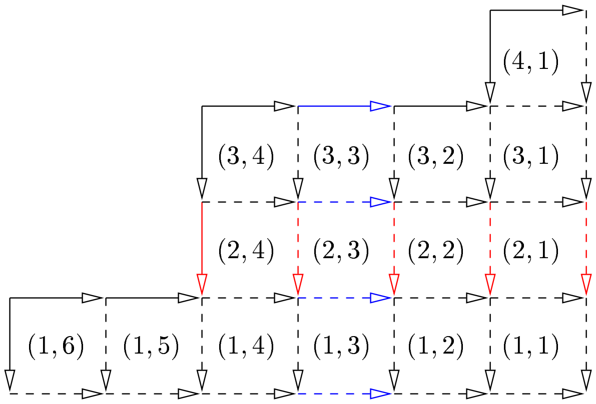
Propositie 54 *De tegel-normaalvormen zijn van de vorm* $\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_m \mathbf{j}_1^\top \ldots \mathbf{j}_l^\top$.

Bewijs Triviaal. □

Aangezien slagen als transformaties op toestanden gezien kunnen worden (zoals eerder opgemerkt), wordt de toestand op ieder moment in een conversie (d.w.z. voor iedere subterm) volledig bepaald door de begintoestand, of zelfs door een willekeurige toestand ergens in de conversie. In het bewijs van de volgende stelling laten we daarom toestanden impliciet.

Stelling 55 *De tegel TRS is terminerend.*

Bewijs Het globale idee is dat tegelen van ieder 'hokje' in Figuur 16 eindigt vanwege eindigheid van ontwikkelingen, en dat het hele proces dus eindigt vanwege eindigheid van het aantal hokjes. Om dit formeel te maken introduceren



Figuur 16: Terminatie van tegelen

we een gelabelde versie van de tegel TRS. We laten we zien dat iedere tegeling verrijkt kan worden tot een *goed* gelabelde tegeling, en dat goed gelabelde tegelingen termineren.

1. Een *label* is een quadrupel bestaande uit twee *coördinaten* (natuurlijke getallen) en twee parallelle slagen, het *domein* en *beeld* geheten.

   (a) Het alfabet van de gelabelde tegel TRS bestaat uit de constante o, gelabelde slagen, en gelabelde inverse slagen. Een gelabelde conversie is *goed*, als voor ieder voorkomen van een slag in de conversie geldt

      i. het beeld is het residu van het domein na de slag (en mutatis mutandis voor de inverse),

ii. voor de coördinaten (r, c) en (r', c') van de slag en z'n opvolger:
   - $r \leq r'$, en als $r = r'$ dan is het beeld van de eerste bevat in het domein van de tweede,
   - $c' \leq c$, en als $c' = c$ dan is het domein van de tweede bevat in het beeld van de eerste.

(b) Beschouw willekeurige gelabelde slagen $\mathbf{i}^{\top}_{(r,c,v,u)}$ en $\mathbf{j}_{(r',c',u',v')}$. Laten $\hat{r}$ en $\hat{c}$ de minima van respectievelijk r en r', en c en c' zijn. Dan is er een gelabelde tegel regel met linkerkant $\mathbf{i}^{\top}_{(r,c,v,u)}(\mathbf{j}_{(r',c',u',v')}(x))$ en rechterkant:

$$\begin{array}{ll} x & \text{als } |i-j| = 0 \\ \mathbf{j}_{(\hat{r},\hat{c},\hat{v},w)}(\mathbf{i}_{(\hat{r},\hat{c},w,y)}(\mathbf{j}^{\top}_{(\hat{r},\hat{c},y,w')}(\mathbf{i}^{\top}_{(\hat{r},\hat{c},w',\hat{v}')}(x)))) & \text{als } |i-j| = 1 \\ \mathbf{j}_{(\hat{r},\hat{c},\hat{v},w)}(\mathbf{i}^{\top}_{(\hat{r},\hat{c},w,\hat{u}')}(x)) & \text{als } |i-j| \geq 2 \end{array}$$

hierbij worden de domeinen en beelden geïnduceerd door residuen 'langs de zijden van het diagram' te nemen, beginnend met $\hat{u} = u \sqcup u'$.

We tonen eerst aan dat goede conversies behouden blijven onder reductie. Het bewaarde gedeelte van de gelabelde conversie is nog steeds goed. Verder voldoen, per constructie, de domeinen en beelden van de door een gelabelde tegel regel gecreeerde domeinen en beelden aan de goedheids clausulen. Beschouw tenslotte 'gecreeerde opvolging' van twee slagen met labels (r_1, c_1, u_1, v_1) en (r_2, c_2, u_2, v_2).

- Als beide slagen bewaarde slagen zijn, dan moet de eerste ('collapsing') tegel regel toegepast zijn geworden, en dan volgen $r_1 \leq r_2$ en $c_2 \leq c_1$ uit goedheid van de oorspronkelijke conversie en transitiviteit van $\leq$. Verder, als b.v. de eerste coördinaten gelijk zijn, dan waren de eerste coördinaten in de regel dat ook en dan volgt $v_1 \sqsubseteq u_2$ uit goedheid van de oorspronkelijke conversie en transitiviteit van $\sqsubseteq$.
- Als één van beide slagen gecreeerd is, zeg de tweede, dan $(r_2, c_2, u_2, v_2) = (\hat{r}, \hat{c}, \hat{v}, w)$, dan volgen $r_1 \leq \hat{r}$ en $\hat{c} \leq c_1$ uit de definities van $\hat{r}$ en $\hat{c}$ en goedheid van de oorspronkelijke conversie. Verder, als b.v. de eerste coördinaten gelijk zijn, dan $v_1 \sqsubseteq v \sqsubseteq \hat{v}$.

Goede conversies zijn ook terminerend. Ken als maat aan een goede conversie de multiset van alle labels die er in voorkomen toe. Orden labels via het lexicografisch product van de ordening op coördinaten en de ordening op parallelle slagen. Coördinaten worden geordend in de product ordening van de gebruikelijke ordening $>$ op de natuurlijke getallen. De parallelle slagen worden geordend via $\rightsquigarrow^+$. Conversies worden dan geordend via de multiset uitbreiding van de ordening op de labels. Uit [DI, Theorem 4.5.5] volgt dat deze ordening terminerend is, aangezien zowel $>$ (natuurlijk) als $\rightsquigarrow^+$ (Lemma 44) terminerend zijn. Iedere tegel stap doet deze maat afnemen. Want ofwel de coördinaten van de gecreeerde labels (van slagen) zijn (alle) kleiner dan de coördinaten van de verwijderde labels, ofwel ze zijn (alle) hetzelfde. In het laatste geval moet vanwege goedheid van de oorspronkelijke conversie en Propositie 37 gelden dat het beeld van de eerste van de verwijderde slagen gelijk is aan het domein van de tweede. D.w.z. $\hat{u} = u = u'$, Per constructie zijn dan de gecreeerde labels bereikbaar via toestandsovergangen (via $\rightsquigarrow$-stappen) en dus kleiner.

Er dient alleen nog aangetoond worden dat iedere tegeling verrijkt kan worden tot een goed gelabelde tegeling. De slagen van een (eindige) conversie kunnen we labellen. De eerste coördinaten kunnen namelijk oplopend, en de tweede coördinaten aflopend gelabeld worden (zie Figuur 16), en iedere slag is geassocieerd met een (elementaire) slag die de lege relatie als residu heeft. Verder kunnen tegel stappen altijd verrijkt worden tot gelabelde tegel stappen, aangezien er per constructie voor iedere labelling van de linkerkant van een tegel regel, er een gelabelde rechterkant is die na het weglaten van de labelling de rechterkant van de tegel regel is. $\square$

Dit bewijs is abstract in de zin dat het alleen gebruik maakt van orthogonaliteit en terminatie van ontwikkelingen. Een gevolg is b.v. dat tegelen termineert voor orthogonale termherschrijfsystemen. Omdat de tegel TRS geen kritieke paren heeft, is tegelen lokaal confluent ([DI, Lemma 2.4.9]) en terminerend, en dus compleet. De volgende propositie brengt tot uitdrukking dat tegelen gebruikt kan worden om residuen te berekenen.

Propositie 56 *1. Laten* $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$ *ontwikkelingen van parallelle slagen* u *en* v *zijn. Als* $\mathbf{u}'(\mathbf{v}')^\top$ *de tegelnormaalvorm van* $\mathbf{u}^\top\mathbf{v}$ *is dan zijn* $\mathbf{u}'$ *en* $\mathbf{v}'$ *ontwikkeling van de parallelle slagen* $v \setminus u$ *en* $u \setminus v$.

2. Laten $\mathbf{U}$ *en* $\mathbf{V}$ *vlechten zijn, en* U *en* V *de geassocieerde multiderivaties. Als* $\mathbf{U}'(\mathbf{V}')^\top$ *de tegelnormaalvorm van* $\mathbf{U}^\top\mathbf{V}$ *is dan zijn* $\mathbf{U}'$ *en* $\mathbf{V}'$ *ontwikkelingen van* $V \setminus U$ *en* $U \setminus V$.

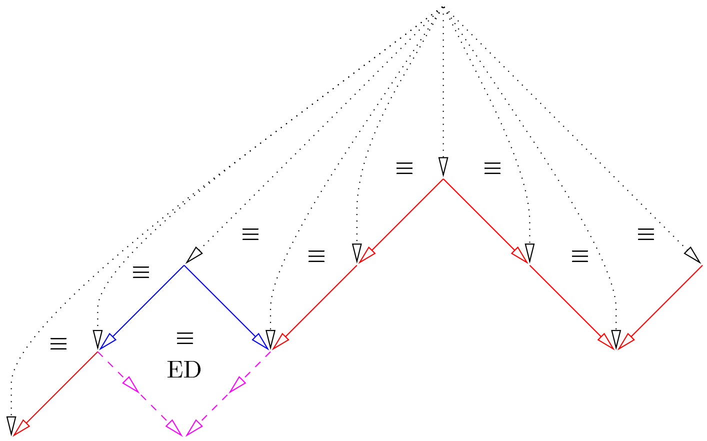
Bewijs [Schets]

1. Het bewijs is analoog aan het tweede onderdeel, waarbij we opmerken dat er een goed gelabelde versie van $\mathbf{u}^\top\mathbf{v}$ bestaat waarvan alle coördinaten gelijk aan $(0,0)$ zijn, wat impliceert dat de uiteindelijke 'residuen' zelf weer ontwikkelingen van parallelle slagen zijn.

2. Associeer met een goed gelabelde versie van $\mathbf{U}^\top\mathbf{V}$ een graaf waarbij de takken corresponderen met toestandsovergangen. Tegelen met een elementair diagram transformeert een conversie in een nieuwe conversie en met zo'n transformatie kunnen we een uitbreiding van de graaf associëren (zie Figuur 17). In de beginsituatie geldt:

   (a) Alle paden tussen twee knopen zijn permutatie equivalent,

   (b) Ieder pad vanuit de wortel naar een knoop is bevat in $U \sqcup V$.



Figuur 17: Equivalentie door tegelen

Deze eigenschappen blijven behouden onder tegelen (gebruik Pijl voor de tweede eigenschap) en gelden dus in het uiteindelijke diagram. Verder geldt per constructie in het uiteindelijke diagram dat zowel U als V bevat zijn in een (ieder) pad W vanuit de wortel naar het eindpunt. Dus $W \equiv U \sqcup V$ waaruit de propositie eenvoudig volgt. □

We definiëren het residu van een vlecht na een andere vlecht als een functie van het (bestaande en unieke) resultaat van het tegelproces.

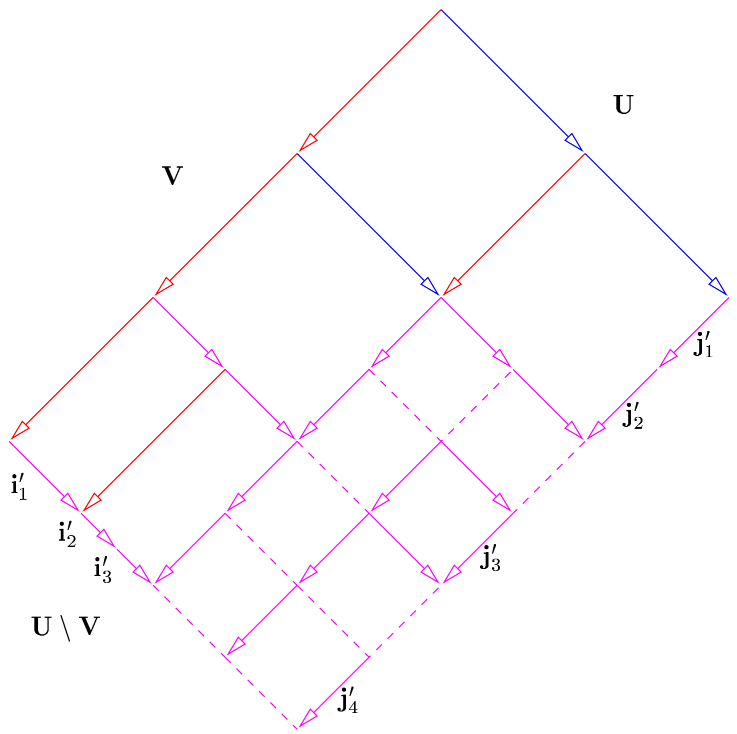
Definitie 57 *Laten* $\mathbf{U}$ *en* $\mathbf{V}$ *twee vlechten zijn. Laat* $\mathbf{V}'(\mathbf{U}')^\top$ *de tegelnormaalvorm van* $\mathbf{V}^\top\mathbf{U}$ *zijn. Dan definiëren we*

1. *het* residu van $\mathbf{U}$ na $\mathbf{V}$ *door* $\mathbf{U} \setminus \mathbf{V} = \mathbf{V}'$*,*
2. *de* som van $\mathbf{V}$ en $\mathbf{U}$ *door* $\mathbf{V} \sqcup \mathbf{U} = \mathbf{V}(\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})$*, en*
3. *dat* $\mathbf{U}$ bevat is in $\mathbf{V}$*,* $\mathbf{U} \sqsubseteq \mathbf{V}$ *als* $\mathbf{U} \setminus \mathbf{V} = o$*.* $\mathbf{U}$ is equivalent met $\mathbf{V}$*,* $\mathbf{U} \equiv \mathbf{V}$*, als ook* $\mathbf{V}$ *bevat is in* $\mathbf{U}$*.*

Merk op dat de tegel TRS compleet is en dus dat de operaties en noties wel-gedefinieerd zijn. De voorgaande propositie maakt in combinatie met de in de voorgaande subsectie afgeleide correspondentie tussen vlecht equivalentie en permutatie equivalentie, dat vlechten orthogonaal is.

Stelling 58 *Vlechten is orthogonaal.*

Bewijs Dat $\setminus$, $\sqcup$, o, en $\sqsubseteq$ de orthogonaliteits eigenschappen in Subsectie 3.3 hebben, volgt eenvoudig uit de overeenkomstige eigenschappen van de overeenkomstige operaties en noties voor multiderivaties. □



Figuur 18: Residu door tegelen

Opgave 59 *1. We kunnen het berekenen van residuen ook als volgt door middel van een TRS formaliseren. Het alfabet van de residu TRS is het alfabet van de tegel TRS, uitgebreid met binaire functiesymbolen A en L, en unaire functiesymbolen R, ϵ, en $\epsilon^\top$. De regels van de residu TRS zijn de regels van de tegel TRS, uitgebreid met*

$$\begin{array}{rclrcl}
A(x,y) & \to & L(y,R(x)) & \epsilon(\epsilon^\top(x)) & \to & x \\
L(o,y) & \to & \epsilon(y) & R(o) & \to & \epsilon^\top(o) \\
L(\mathbf{i}(x),y) & \to & L(x,\mathbf{i}^\top(y)) & R(\mathbf{i}(y)) & \to & \mathbf{i}(R(y))) \\
\epsilon(\mathbf{i}(x)) & \to & \mathbf{i}(\epsilon(x)) & \mathbf{i}^\top(\epsilon^\top(x)) & \to & \epsilon^\top(x)
\end{array}$$

Voor twee vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ definiëren we $\mathbf{U} \setminus \mathbf{V}$ als de residu-normaalvorm van $A(\mathbf{U},\mathbf{V})$.

Laat zien dat de residu TRS doet wat z'n naam suggereert dat hij doet.

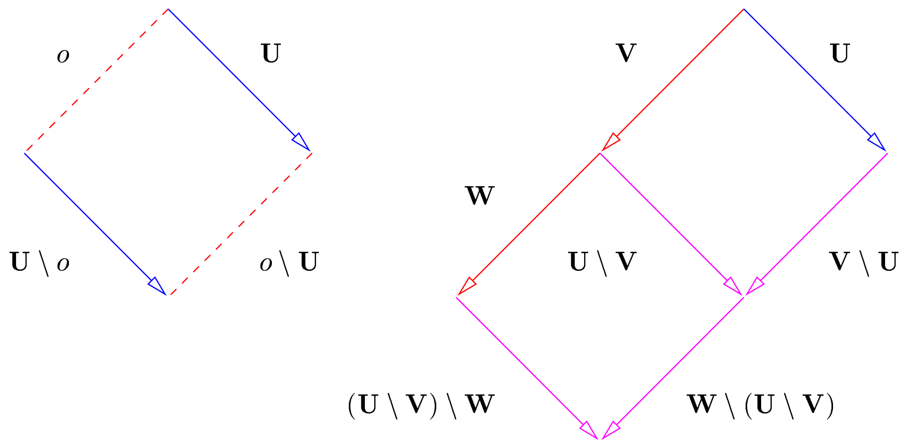
2. Geef twee vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ zodanig dat tegelen het diagram in Figuur 18 oplevert. Bereken de normaalvorm van $A(\mathbf{U},\mathbf{V})$ voor deze twee vlechten, met behulp van de residu regels.

Orthogonaliteit van vlechten zegt dat vlecht equivalentie een congruentie relatie voor de residu operatie is. Er geldt echter meer.

Stelling 60 *Voor willekeurige vlechten* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *en* $\mathbf{W}$ *geldt*

$$\begin{array}{rclrcl} \mathbf{U} \setminus o & = & \mathbf{U} & o \setminus \mathbf{U} & = & o \\ \mathbf{U} \setminus (\mathbf{V}\mathbf{W}) & = & (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V}) \setminus \mathbf{W} & (\mathbf{V}\mathbf{W}) \setminus \mathbf{U} & = & (\mathbf{V} \setminus \mathbf{U})(\mathbf{W} \setminus (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})) \end{array}$$

Bewijs We geven alleen het bewijs van $(\mathbf{V}\mathbf{W}) \setminus \mathbf{U} = (\mathbf{V} \setminus \mathbf{U})(\mathbf{W} \setminus (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V}))$.



Figuur 19: Residu gelijkheden

Zie Figuur 19.

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{V}\mathbf{W}) \setminus \mathbf{U} & = & (\mathbf{U}^\top(\mathbf{V}\mathbf{W}))\downarrow \\ & = & ((\mathbf{U}^\top\mathbf{V})\mathbf{W})\downarrow \\ & = & (((\mathbf{V} \setminus \mathbf{U})(\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})^\top)\mathbf{W})\downarrow \\ & = & (\mathbf{V} \setminus \mathbf{U})(\mathbf{W} \setminus (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})) \end{array}$$

waarin voor de derde gelijkheid gebruik gemaakt wordt van symmetrie van elementaire diagrammen. □

De stelling zegt dat het berekenen van het residu van een vlecht na een andere vlecht via tegelen, niet afhangt van de manier waarop we één van beide splitsen.

Opgave 61 1. *Formaliseer het bewijs van de voorgaande stelling.*

2. *Geef drie vlechten zodanig dat als we de vlechten als assen in 3D zien, dat tegelen van de kubus 'vastloopt' (d.w.z. dat de randen van aan elkaar grenzende diagrammen niet overeenstemmen).*

De stelling geldt voor willekeurige orthogonale herschrijfsystemen (die kanonieke elementaire diagrammen hebben).

Voorbeeld 62 *Termherschrijfsystemen (en de λ-calculus) hebben a priori geen kanonieke elementaire diagrammen. Beschouw b.v. een TRS met regel $D(x) \to x + x$. Dan bestaat het residu van $D(1)$ na de herschrijfstap $D(D(1)) \to D(1) + D(1)$ uit beide $D(1)$-redexen. Deze kunnen in willekeurige volgorde gecontraheerd worden, resulterend in twee (equivalente) elementaire diagrammen. We kunnen natuurlijk altijd een vaste volgorde kiezen en kanoniciteit herstellen. In [Bar84] wordt er, voor de λ-calculus, voor gekozen om de redexen van links naar rechts te contraheren.*

3.7 Confluentie door Completeren (vervolg)

In Subsectie 3.1 hebben we gezien dat het completeringsproces stopt voor vlechten met 3 en 4 strengen. Dit laten we nu zien voor vlechten met willekeurig veel strengen.

Stelling 63 *Het completeren van de R regels stopt en resulteert in een confluent herschrijfsysteem voor vlechten.*

Bewijs Uit Stelling 55 en Propositie 56 volgt dat het tegelen van twee ontwikkelingen termineert en resulteert in twee vlechten die zelf weer ontwikkelingen zijn. D.w.z. rechterkanten van toegevoegde regels zijn altijd ontwikkelingen. Aangezien ontwikkelingen eindig zijn, en er op ieder moment slechts eindig veel verschillende slagen mogelijk zijn (nl. n voor een vlecht met $n+1$ strengen), volgt dat het completerings proces stopt. Confluentie volgt vervolgens uit Propositie 56. $\square$

4 Minimaliteit

In de voorgaande sectie hebben we gezien dat vlechten orthogonaal is. In het bijzonder is aangetoond dat voor twee willekeurige vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$, hun som $\mathbf{U} \sqcup \mathbf{V}$ een vlecht is die een extensie van zowel $\mathbf{U}$ als $\mathbf{V}$ is. Maar bestaat er een kortere vlecht die zowel $\mathbf{U}$ als $\mathbf{V}$ uitbreidt? In deze subsectie tonen we aan dat $\mathbf{U} \sqcup \mathbf{V}$ de kortste is (op equivalentie na). Beschouw daartoe een willekeurige gemeenschappelijke extensie $\mathbf{U}\ \mathbf{V}' =_E \mathbf{V}\ \mathbf{U}'$ van $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$. We calculeren eerst:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{U} \setminus \mathbf{V}) \setminus \mathbf{U}' &=_E \mathbf{U} \setminus (\mathbf{V}\ \mathbf{U}') \\
&=_E \mathbf{U} \setminus (\mathbf{U}\ \mathbf{V}') \\
&=_E (\mathbf{U} \setminus \mathbf{U}) \setminus \mathbf{V}' \\
&=_E o \setminus \mathbf{V}' \\
&=_E o
\end{aligned}$$

Hiervan gebruikmakend volgt eenvoudig dat $\mathbf{V}\ \mathbf{U}'$ een extensie is van $\mathbf{U} \sqcup \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\ \mathbf{U}' &=_E \mathbf{V}\ \mathbf{U}'\ o \\
&=_E \mathbf{V}\ \mathbf{U}'\ ((\mathbf{U} \setminus \mathbf{V}) \setminus \mathbf{U}') \\
&=_E \mathbf{V}\ (\mathbf{U}' \sqcup (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})) \\
&=_E \mathbf{V}\ (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})\ (\mathbf{U}' \setminus (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V})) \\
&=_E (\mathbf{U} \sqcup \mathbf{V})\ (\mathbf{U}' \setminus (\mathbf{U} \setminus \mathbf{V}))
\end{aligned}$$

Aangezien equivalente vlechten even lang zijn volgt onmiddellijk dat $\mathbf{U} \sqcup \mathbf{V}$ de kortste gemeenschappelijke extensie van $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ is.

Merk op dat, op het lengte argument na, deze calculatie opgaat voor willekeurige orthogonale herschrijfsystemen. Het volgende voorbeeld laat zien dat de zin waarin de som van twee herschrijfrijen de minimale uitbreiding van beide rijen is, in het geval van orthogonale TRSen anders is dan men wellicht zou verwachten.

Voorbeeld 64 *Beschouw de éénregelige orthogonale TRS $I(x) \to x$ en de twee mogelijke herschrijfstappen $I(I(x)) \to I(x)$. De som van de twee stappen leidt tot de stap $I(I(x)) \multimap\!\!\to x$ waarin beide redexen tegelijkertijd gecontraheerd worden. Merk echter op dat een gemeenschappelijk reduct $I(x)$ al bereikt was.*

Het voorbeeld toont aan dat er in termherschrijven zgn. *syntactische accidenten* voorkomen; er bestaan herschrijfrijen die wezenlijk van elkaar verschillen maar toch in dezelfde termen beginnen en eindigen. Het verschil tussen vlechten en termherschrijven is dus dat bij vlechten een herschrijfrij gereconstrueerd kan worden uit de begin- en eindtermen, die uniek is op equivalentie na, maar dat dat in termherschrijven in het algemeen niet kan (beschouw b.v. de stap $I(I(x)) \to I(x)$ in het voorbeeld). Een herschrijfsysteem dat deze reconstructie eigenschap bezit noemen we *extreem*. Hoewel niet alle orthogonale termherschrijfsystemen extreem zijn, kunnen ze op natuurlijke wijze in extreme TRSen ingebed worden door herschijven op een geschikte manier van een 'action-stamping' mechanisme te voorzien [Lév78, Mar92, Oos96].

5 Het Uniform Woordprobleem

Het uniforme woordprobleem voor vlechten, d.w.z. de vraag of twee vlechten equivalent zijn, is vanuit een beslisbaarheids standpunt niet bijzonder interessant: equivalente vlechten bestaan uit evenveel slagen (waarom?) en dus kunnen we alle mogelijkheden gewoon proberen.

Alle mogelijkheden proberen is niet erg efficiënt Orthogonaliteit van vlechten leert echter dat twee vlechten $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ equivalent zijn dan en slechts dan als zowel $\mathbf{U} \setminus \mathbf{V} = o$ als $\mathbf{V} \setminus \mathbf{U} = o$, of anders gezegd als tegelen resulteert in twee lege vlechten

Opgave 65

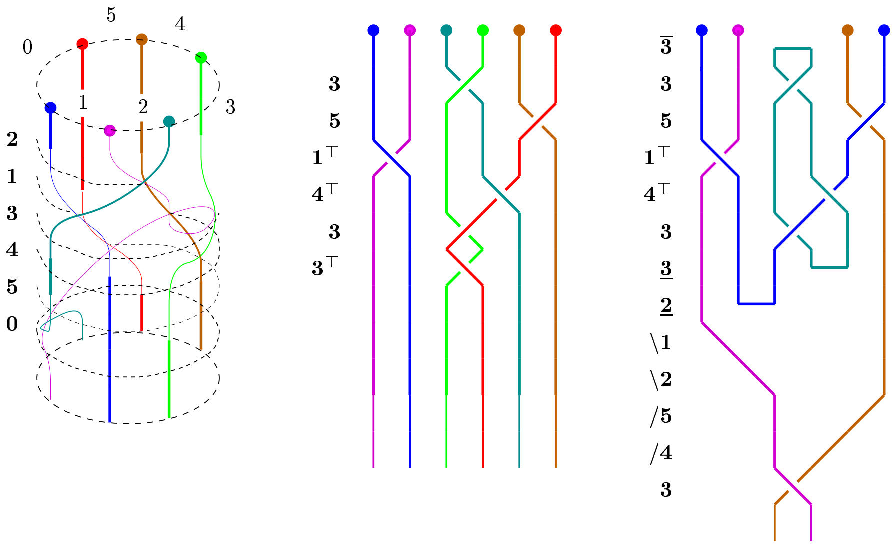
1. *Bewijs de beslisbaarheid van het uniforme woordprobleem.*
2. *Bepaal de complexiteiten van het proberen van alle mogelijkheden en het tegelen, om equivalentie van vlechten te bepalen.*

6 Conclusie

Herschrijftechnieken kunnen toegepast worden om alledaagse (niet-triviale) problemen op te lossen.

Opgave 66 *Er kan natuurlijk eindeloos op het thema vlechten gevarieerd worden. Te denken valt hierbij b.v. aan (in volgorde van een oplopend aantal generatoren en axioma's, zie Figuur 20):*

1. *Punniken: hierbij grenst de laatste streng aan de eerste (de strengen 'liggen op een cylinder'). Er is een extra generator,* **0**, *die tot uitdrukking brengt*



Figuur 20: Punniken, Echt vlechten, en Kluwen

dat de eerste en de laatste streng elkaar kruisen.

2. *Echt vlechten: hierbij kan een slag zowel 'rechts over links', als 'links over rechts' zijn. Iedere vlecht generator* **i** *heeft ook een inverse* $\mathbf{i}^\top$.

3. *Kluwen: hierbij mogen twee aangrenzende strengen met elkaar verbonden worden. Er zijn extra generatoren* $\bar{\mathbf{i}}$, $\underline{\mathbf{i}}$, **i**, *en* /**i**, *voor respectievelijk bovenkanten, onderkanten, naar rechts, en naar links bewegen van strengen.*

4. *etc.*

Geef axioma's voor punniken, vlechten, en kluwen. Stel interessante vragen voor deze systemen en los ze op.

De meeste gebruikte formele methoden spelen zich af op term niveau. Voor (een aanzet tot) twee en meer dimensionale herschrijftechnieken, waaronder completering, raadplege men het werk van Lafont [Laf92].

References

[Art26] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Hamburger Abhandlungen*, 4:47–72, 1926.

[Art47] E. Artin. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48(1):101–126, January 1947.

[Bar84] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, volume 103 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, revised edition, 1984.

[Boh47] F. Bohnenblust. The algebraical braid group. *Annals of Mathematics*, 48(1):127–136, January 1947.

[DI] Collegediktaat termherschrijven 96/97, deel I. Vrije Universiteit, Faculteit der Wiskunde en Informatica.

[DII] Collegediktaat termherschrijven 96/97, deel II. Vrije Universiteit, Faculteit der Wiskunde en Informatica.

[Gar69] F.A. Garside. The braid group and other groups. *Quarterly Journal of Mathematics*, 20:235–254, 1969.

[HL91] Gérard Huet and Jean-Jacques Lévy. Computations in orthogonal rewriting systems, I. In Jean-Louis Lassez and Gordon Plotkin, editors, *Computational Logic: Essays in Honor of Alan Robinson*, chapter 11. The MIT Press, 1991.

[Hue94] Gérard Huet. Residual theory in λ-calculus: a formal development. *Journal of Functional Programming*, 4(3):371–394, July 1994.

[Klo80] J. W. Klop. *Combinatory Reduction Systems*. PhD thesis, Rijksuniversiteit Utrecht, June 1980. Mathematical Centre Tracts 127.

[KV] Jan Willem Klop and Roel de Vrijer. A topological proof of confluence by decreasing diagrams. Draft version of July 18, 1996.

[Laf] Yves Lafont. Equational reasoning with 2-dimensional diagrams. Preliminary version of July 29, 1992.

[Laf92] Y. Lafont. Penrose diagrams and 2-dimensional rewriting. In M.P. Fourman, P.T. Johnstone, and A.M. Pitts, editors, *Applications of Categories in Computer Science*, volume 177 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 191–201. Cambridge University Press, 1992.

[Lév78] Jean-Jacques Lévy. *Réductions correctes et optimales dans le λ-calcul*. Thèse de doctorat d'etat, Université Paris VII, 1978.

[Mar92] Luc Maranget. *La stratégie paresseuse*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 6 Juilliet 1992.

[Mel] Paul-André Melliès. Braids described as an orthogonal rewriting system. Draft version of June 21, 1995.

[Oos94] Vincent van Oostrom. *Confluence for Abstract and Higher-Order Rewriting.* PhD thesis, Vrije Universiteit, Amsterdam, March 1994.

[Oos96] Vincent van Oostrom. Higher-order families. In Harald Ganzinger, editor, *Rewriting Techniques and Applications, 7th International Conference, RTA-96*, volume 1103 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 392–407. Springer, 1996.

[Oos97a] Vincent van Oostrom. Developing developments. *Theoretical Computer Science*, 175(1):159–181, March 1997.

[Oos97b] Vincent van Oostrom. Finite family developments. In Hubert Comon, editor, *Rewriting Techniques and Applications, 8th International Conference, RTA-97*, volume 1232 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 308–322. Springer, 1997.

[SS91] G. Schmidt and T. Ströhlein. *Relations and Graphs - Discrete Mathematics for Computer Scientists.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1991.

[Tak95] Masako Takahashi. Parallel reductions in λ-calculus. *Information and Computation*, 118:120–127, 1995.

[Zan95] Hans Zantema, 1995. Email to the TeReSe mailing-list.